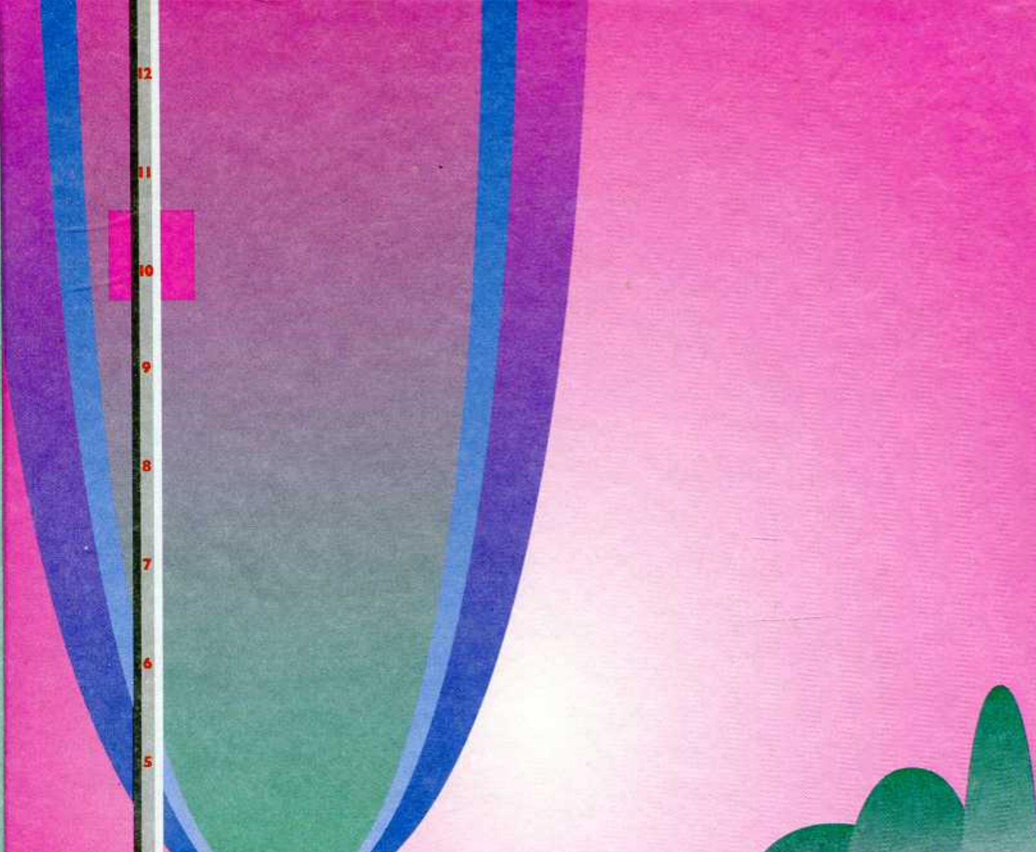


Алгебра

8

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Алгебра

8 класс

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

*Рекомендовано
Министерством
образования и науки
Российской
Федерации*

19-е издание

Москва
·Просвещение·
2012

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
А45

Авторы:
Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова, М. И. Шабунин

Учебник подготовлен под научным руководством академика
А. Н. Тихонова

На учебник получены положительные заключения Российской академии наук (№ 10106-5215/488 от 03.10.2008) и Российской академии образования (№ 01-195/5/7д от 11.10.07)

Условные обозначения

- выделение основного материала
- текст, который важно знать и полезно помнить
- ▶ ◁ решение задачи
- ● ○ обоснование утверждения или вывод формулы
- обязательные задачи
- дополнительные задачи
- трудные задачи
- № занимательные задачи

Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреж-
А45 дений / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др.] — 19-е изд. — М. : Просвещение, 2012. — 255 с. : ил. — ISBN 978-5-09-028790-6.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-09-028790-6

I

глава

Неравенства

§ 1 Положительные и отрицательные числа

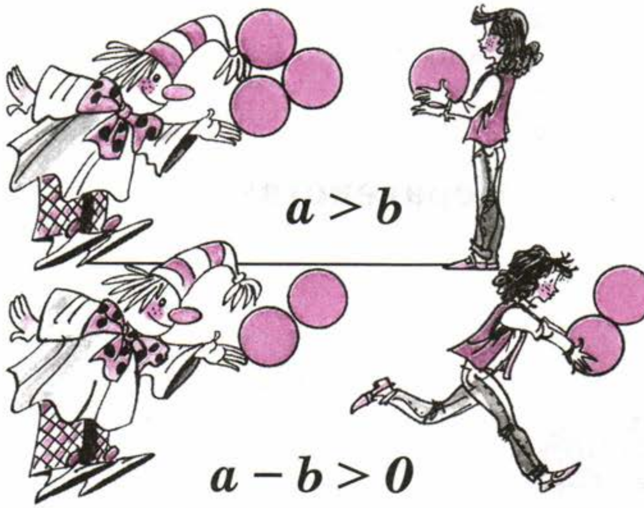
В курсе математики VI—VII классов вы познакомились с рациональными числами. Рациональное число может быть положительным, отрицательным или равным нулю.

Положительное рациональное число — это число вида $\frac{k}{n}$, где k и n — натуральные числа. Например, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{4}{8}$ — положительные рациональные числа.

Отрицательное рациональное число — это число вида $-\frac{k}{n}$, где k и n — натуральные числа. Например, $-\frac{2}{3}$, $-\frac{8}{5}$, $-\frac{4}{8}$ — отрицательные рациональные числа. Отрицательное рациональное число можно записать в виде $\frac{-k}{n}$. Например, $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}$.

Рациональными числами называют числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Если рациональное число можно представить в виде дроби, у которой знаменатель является натуральной степенью числа 10, то это рациональное



число обычно записывают в виде десятичной дроби. Например:

$$\frac{25}{100}=0{,}25;\quad \frac{257}{1000}=0{,}257;\quad \frac{-324}{10}=-32{,}4.$$

Положительные числа называют *бо́льшими нуля*, а отрицательные — *меньшими нуля*. Для того чтобы коротко записать, что число больше или меньше нуля, используют знаки неравенства > (больше) и < (меньше). Так, запись $a>0$ означает, что число a больше нуля, т. е. a — положительное число; запись $b<0$ означает, что число b меньше нуля, т. е. b — отрицательное число. Например:

$$25>0,\quad \frac{5}{7}>0,\quad -21<0,\quad -\frac{2}{3}<0.$$

Знаки > и < называют *противоположными*. Так, $5>0$ и $7>0$ — неравенства одинакового знака, а $3>0$ и $-2<0$ — неравенства противоположных знаков.

В дальнейшем будут использоваться следующие *свойства чисел*:

Формулировка с помощью букв	Словесная формулировка
1. Если $a>0$ и $b>0$, то $a+b>0$, $ab>0$, $\frac{a}{b}>0$.	Сумма, произведение и частное двух положительных чисел — положительные числа.

Продолжение

Формулировка с помощью букв	Словесная формулировка
2. Если $a < 0$ и $b < 0$, то $a + b < 0$, $ab > 0$, $\frac{a}{b} > 0$, $\frac{b}{a} > 0$.	Сумма отрицательных чисел отрицательна, а произведение и частное двух отрицательных чисел положительны.
3. Если $a > 0$ и $b < 0$, то $ab < 0$, $\frac{a}{b} < 0$, $\frac{b}{a} < 0$.	Произведение и частное положительного и отрицательного чисел отрицательны.
4. Если $ab > 0$, то или $a > 0$ и $b > 0$, или $a < 0$ и $b < 0$. Если $\frac{a}{b} > 0$, то или $a > 0$ и $b > 0$, или $a < 0$ и $b < 0$.	Если произведение или частное двух чисел положительно, то эти числа имеют одинаковые знаки (т. е. оба числа положительны или оба отрицательны).
5. Если $ab < 0$, то или $a > 0$ и $b < 0$, или $a < 0$ и $b > 0$. Если $\frac{a}{b} < 0$, то или $a > 0$ и $b < 0$, или $a < 0$ и $b > 0$.	Если произведение или частное двух чисел отрицательно, то эти числа имеют разные знаки (т. е. одно из них положительно, а другое отрицательно).
6. Если $ab = 0$, то или $a = 0$, $b \neq 0$, или $a \neq 0$, $b = 0$, или $a = 0$, $b = 0$.	Если произведение двух чисел равно нулю, то хотя бы одно из этих чисел равно нулю.
7. Если $\frac{a}{b} = 0$, то $a = 0$, $b \neq 0$.	Если дробь равна нулю, то ее числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

На числовой оси положительные числа изображаются точками, лежащими правее точки 0, а отрицательные числа — точками, лежащими левее точки 0 (рис. 1).

Для краткости вместо слов «точка, изображающая число a» говорят просто «точка a». Например, можно сказать, что точка 3 лежит правее точки 0; точка -2 лежит левее точки 0 (рис. 1).

Рис. 1

Задача 1 Доказать, что если $a < 0$, то $a^2 > 0$ и $a^3 < 0$.

▶ По условию $a < 0$. Так как $a^2 = a \cdot a$, а произведение двух отрицательных чисел положительно, то $a^2 > 0$. По свойству степени $a^3 = a^2 \cdot a$, т. е. a^3 является произведением положительного числа a^2 и отрицательного числа a, поэтому $a^3 < 0$. ◁

Вообще при возведении отрицательного числа в четную степень получается положительное число. При возведении отрицательного числа в нечетную степень получается отрицательное число.

Например, $(-2{,}8)^6 > 0$, $(-1{,}2)^5 < 0$.

Задача 2 Решить уравнение $(2x+1)(3x-9)=0$.

▶ Данное произведение равно нулю, если хотя бы один из множителей равен нулю, т. е. если $2x+1=0$ или $3x-9=0$. Решая уравнение $2x+1=0$, находим $x=-\frac{1}{2}$; решая уравнение $3x-9=0$, находим $x=3$.

Ответ $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=3$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $\frac{x^2+5x}{x^2+25}=0$.

▶ Данная дробь равна нулю, если $x^2+5x=0$, а $x^2+25 \neq 0$. Уравнение $x^2+5x=0$ можно записать так:

$$x(x+5)=0.$$

Это уравнение имеет корни $x_1=0$, $x_2=-5$. При $x=0$ и $x=-5$ знаменатель не равен нулю: $x^2+25 \neq 0$.

Ответ $x_1=0$, $x_2=-5$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $\frac{x^2-25}{x+5}=0$.

▶ Данная дробь равна нулю, если $x^2-25=0$, а $x+5 \neq 0$.
Уравнение $x^2-25=0$ можно записать в виде

$$(x-5)(x+5)=0,$$

откуда $x_1=5$, $x_2=-5$. При $x=5$ знаменатель $x+5 \neq 0$, а при $x=-5$ знаменатель $x+5=0$. Следовательно, $x=-5$ не является корнем исходного уравнения.

Ответ $x=5$. ◁

Упражнения

Вычислить устно (1—4).

1 1) $1{,}2\cdot 6$; 2) $\frac{1}{2}\cdot(-2)$; 3) $\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{7}{9}\right)$; 4) $(-3)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$.

2 1) $0{,}2\cdot 6\cdot 5$; 2) $(-2)\cdot 4\cdot 5$;
3) $0{,}2\cdot(-5)\cdot 6$; 4) $5\cdot(-0{,}2)\cdot(-4)$;
5) $(-6)\cdot 0{,}4\cdot(-5)$; 6) $(-6)\cdot(-4)\cdot(-3)$.

3 1) $36:3$; 2) $(-36):2$; 3) $655:(-5)$;
4) $(-0{,}4):8$; 5) $(-80):(-16)$; 6) $(-0{,}9):(-0{,}3)$.

4 1) $2\cdot(-15):3$; 2) $(-0{,}4)\cdot(-5):2$;
3) $6\cdot(-8):(-12)$; 4) $(-6)\cdot(-12):(-8)$;
5) $(-45):3\cdot(-2)$; 6) $(-55):(-11)\cdot(-3)$.

5 Найти числовое значение выражения:
1) $a^3b^2c^2$ при $a=-1,\ b=-3,\ c=2$;
2) ab^3c^2 при $a=-2,\ b=-1,\ c=-3$;
3) $\frac{a^3b^2}{c^3}$ при $a=-2,\ b=-3,\ c=-1$;
4) $\frac{ab^3}{c^2}$ при $a=8,\ b=-1,\ c=-2$.

6 Используя знак $>$ или $<$, записать утверждение:
1) $-11{,}7$ — отрицательное число;
2) $98{,}3$ — положительное число;
3) x — отрицательное число;
4) y — положительное число.

7 Пусть $a>0,\ b>0$. Доказать, что:
1) $2a(a+3b)>0$; 2) $(a+b)(2a+b)>0$.

8 Пусть $a<0,\ b<0$. Доказать, что:
1) $3a+4b<0$; 2) $2a(a+b)>0$.

9 Пусть $a>0,\ b<0$. Доказать, что:
1) $a-b>0$; 2) $b-a<0$;
3) $a^2b+b^3<0$; 4) $ab^3+a^3b<0$.

10 Не вычисляя, выяснить, положительно или отрицательно значение выражения:
1) $(-17)\cdot(-1{,}281)^2$; 2) $(-2{,}23)^3\cdot(-0{,}54)^5$;
3) $(-0{,}37)^3+(-2{,}7)^5$; 4) $(-3{,}21)^2-(-45{,}4)^3$.

11 Доказать, что при любом a значение выражения положительно:
1) $2-\frac{1}{a^2+1}$; 2) $a^2+\frac{1-a^2}{1+a^2}$;
3) $(3a+2)^2-6a(a+2)$; 4) $(2a-3)^2-3a(a-4)$.

12 Доказать, что при любом a значение выражения отрицательно:

1) $(-1{,}5)^3 - a^2$; 2) $(-7)^5 - (1-a)^4$;

3) $2a(4a-3) - (3a-1)^2$; 4) $3a(a+4) - (2a+3)^2$.

13 Пусть $a < 0$, $b > 0$. Выяснить, положительно или отрицательно значение выражения:

1) a^3b^4; 2) $\frac{a^2}{b^3}$; 3) $(2a-b)(2b-a)$; 4) $\frac{3b-2a}{3a-2b}$.

14 Выяснить, положительно или отрицательно число a, если:

1) $-a < 0$; 2) $-a > 0$; 3) $a^2a^3 > 0$;

4) $a^4a^3 < 0$; 5) $\frac{a^5}{a^2} > 0$; 6) $\frac{a^4}{a^3} < 0$.

15 Пусть $a < 0$. Выяснить, положительно или отрицательно число b, если:

1) $ab > 0$; 2) $ab < 0$; 3) $\frac{a}{b} < 0$;

4) $\frac{b}{a} > 0$; 5) $ab = -1$; 6) $\frac{a}{b} = 2$.

Решить уравнение **(16—21)**.

16 1) $x(x+1) = 0$; 2) $x(x-2) = 0$;

3) $(x-2)(x+3) = 0$; 4) $(x+4)(x+5) = 0$.

17 1) $(3x-1)(x+5) = 0$; 2) $(2x+3)(x+1) = 0$;

3) $(1+2x)(3x-2) = 0$; 4) $(5x-3)(2+3x) = 0$.

18 1) $x^2 + x = 0$; 2) $x^2 - x = 0$;

3) $5x - x^2 = 0$; 4) $3x^2 + 4x = 0$.

19 1) $x^2 - 9 = 0$; 2) $16 - x^2 = 0$;

3) $25 - 4x^2 = 0$; 4) $49x^2 - 16 = 0$.

20 1) $\frac{x+1}{x-2} = 0$; 2) $\frac{x-1}{x+2} = 0$; 3) $\frac{2x-1}{3x+1} = 0$; 4) $\frac{1+2x}{2x-5} = 0$.

21 1) $\frac{x^2-4}{x-2} = 0$; 2) $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$; 3) $\frac{x^2+5x}{x} = 0$; 4) $\frac{x-3x^2}{x} = 0$.

Решить уравнение **(22—24)**.

22 1) $\frac{x(x+2)}{x+1} = 0$; 2) $\frac{x(x-2)}{x-3} = 0$;

3) $\frac{(2x-1)(x-2)}{x+3} = 0$; 4) $\frac{(x+3)(2x-4)}{x-1} = 0$;

5) $\frac{x+2}{x^2-x-1} = 0$; 6) $\frac{x-3}{x^2+x+1} = 0$.

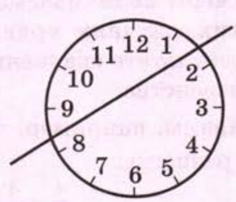
23 1) $\frac{x^2-1}{x+2} = 0$; 2) $\frac{x^2-49}{x-1} = 0$;

3) $\frac{3x^2+x}{x-5} = 0$; 4) $\frac{x-5x^2}{x+3} = 0$.

№ 1

***ПРЯМАЯ РАЗБИВАЕТ ЧИСЛА НА ЦИФЕРБЛАТЕ ЧАСОВ НА ДВЕ ГРУППЫ.
КАК ПРОВЕСТИ ПРЯМУЮ, ЧТОБЫ СУММЫ ЧИСЕЛ В ОБЕИХ ГРУППАХ БЫЛИ ОДИНАКОВЫ?***

$$\begin{array}{r} 9 \\ 10 \\ +\,11 \\ 12 \\ 1 \\ \hline 43 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ +\,6 \\ 7 \\ 8 \\ \hline 35 \end{array}$$

24 1) $\frac{x}{x-5}-\frac{x-2}{x-6}=0$; 2) $\frac{x+1}{x-2}+\frac{1-x}{x+3}=0$;

3) $\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}=0$; 4) $\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-2)(x-3)}=0$.

25 Доказать, что:

1) $\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}>0$, если $a>0$;

2) $\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a-1}>0$, если $a<0$;

3) $\frac{2}{3a+2}-\frac{1}{a+1}<0$, если $a>0$;

4) $\frac{1}{1-a}-\frac{3}{3-2a}<0$, если $a<0$.

26 Вычислить (n — натуральное число):

1) $\frac{(-1)^{6n}-(-1)^{2n+3}}{(-1)^{4n+1}+(-1)^{6n-1}}$; 2) $\frac{(-1)^{2n}+(-1)^{2n+1}}{(357-2{,}4)^6}$.

27 Упростить выражение:

1) $\frac{a-1}{a+1}:\frac{1}{a^2+2a+1}+1$; 2) $\frac{3a^2+4a+1}{(a+1)^2}-\frac{a-1}{a+1}$.

§ 2 Числовые неравенства

Сравнение чисел широко применяется на практике. Например, экономист сравнивает плановые показатели с фактическими, врач сравнивает температуру больного с нормальной, токарь сравнивает размеры вытачиваемой детали с эталоном. Во всех таких случаях сравниваются некоторые числа. В результате сравнения чисел возникают числовые неравенства.

Сравним, например, числа $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{4}$. Для этого найдем их разность:

$$\frac{4}{5}-\frac{3}{4}=\frac{16-15}{20}=\frac{1}{20}.$$

Следовательно, $\frac{4}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}$, т. е. $\frac{4}{5}$ получается прибавлением к числу $\frac{3}{4}$ положительного числа $\frac{1}{20}$. Это означает, что число $\frac{4}{5}$ больше $\frac{3}{4}$ на $\frac{1}{20}$. Таким образом, $\frac{4}{5}>\frac{3}{4}$, так как их разность положительна.

Определение. Число a больше числа b, если разность $a-b$ положительна. Число a меньше числа b, если разность $a-b$ отрицательна.

Если a больше b, то пишут: $a>b$; если a меньше b, то пишут: $a<b$.

Таким образом, неравенство $a>b$ означает, что разность $a-b$ положительна, т. е. $a-b>0$. Неравенство $a<b$ означает, что $a-b<0$.

Задача 1 Доказать, что если $a>b$, то $b<a$.

▶ Неравенство $a>b$ означает, что $a-b$ — положительное число. Тогда $b-a=-(a-b)$ — отрицательное число, т. е. $b<a$. ◁

Для любых двух чисел a и b из следующих трех соотношений $a > b$, $a = b$, $a < b$ только одно является верным.
Например, для чисел -5 и -3 неравенство $-5 < -3$ является верным, а соотношения $-5 = -3$ и $-5 > -3$ не являются верными.

Сравнить числа a и b — значит выяснить, какой из знаков >, = или < нужно поставить между этими числами, чтобы получить верное соотношение. Это можно сделать, определив знак разности $a - b$.

Задача 2 Сравнить числа 0,79 и $\frac{4}{5}$.

▶ Найдем их разность:

$$0{,}79 - \frac{4}{5} = 0{,}79 - 0{,}8 = -0{,}01.$$

Так как $0{,}79 - \frac{4}{5} < 0$, то $0{,}79 < \frac{4}{5}$. ◁

Геометрически неравенство $a > b$ означает, что на числовой оси точка a лежит правее точки b (рис. 2).

Например, точка $\frac{4}{5}$ лежит правее точки 0,79, так как $\frac{4}{5} > 0{,}79$; точка 2,3 лежит левее точки 4,4, так как $2{,}3 < 4{,}4$ (рис. 3).

Задача 3 Доказать, что $a^2 + b^2 > 2ab$, если $a \neq b$.

▶ Докажем, что разность $a^2 + b^2 - 2ab$ положительна. В самом деле, $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2 > 0$, так как $a \neq b$. ◁

Задача 4 Доказать, что $a + \frac{1}{a} > 2$, если $a > 0$ и $a \neq 1$.

▶ Докажем, что разность $a + \frac{1}{a} - 2$ положительна.

Действительно, $a + \frac{1}{a} - 2 = \frac{a^2 + 1 - 2a}{a} = \frac{(a-1)^2}{a} > 0$,

так как $a > 0$ и $a \neq 1$. ◁

Рис. 2

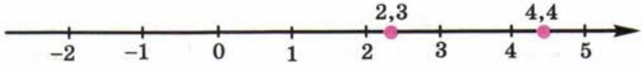


Рис. 3

Задача 5 Доказать, что если $\frac{n}{m}$ — правильная дробь, то

$$\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}.$$

▶ Напомним, что дробь $\frac{n}{m}$ называется правильной, если $n < m$ (n и m — натуральные числа). Разность $\frac{n}{m} - \frac{n+1}{m+1} = \frac{n(m+1) - m(n+1)}{m(m+1)} = \frac{n-m}{m(m+1)}$ меньше нуля, так как $n - m < 0$, $m > 0$, $m + 1 > 0$. Следовательно, $\frac{n}{m} < \frac{n+1}{m+1}$. ◁

Упражнения

28 Используя определение числового неравенства, сравнить числа:
1) 0,3 и $\frac{1}{5}$; 2) $\frac{1}{3}$ и 0,3; 3) $\frac{13}{40}$ и 0,35; 4) $-\frac{5}{8}$ и $-0{,}7$.

29 Сравнить числа a и b, если:
1) $b - a = -1{,}3$; 2) $b - a = 0{,}01$;
3) $a - b = (-5)^4$; 4) $a - b = -5^4$.

30 Доказать, что при любых значениях a верно неравенство:
1) $a^2 > (a+1)(a-1)$;
2) $(a+2)(a+4) > (a+1)(a+5)$.

31 Сравнить значения выражения

$$\frac{a^2}{(1+a)^2} \cdot \left(\frac{1}{a^3} + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a}\right)$$

1) при $a = 235$ и $a = 785$;
2) при $a = -0{,}8$ и $a = -\frac{5}{6}$.

32 Доказать, что при любых значениях a верно неравенство:
1) $a^3 < (a+1)(a^2 - a + 1)$;
2) $(a+7)(a+1) < (a+2)(a+6)$;
3) $1 + (3a+1)^2 > (1+2a)(1+4a)$;
4) $(3a-2)(a+2) < (1+2a)^2$.

33 Доказать, что при любых значениях a и b верно неравенство:
1) $a(a+b) > ab - 2$; 2) $2ab - 1 < b(2a+b)$;
3) $3ab - 2 < a(3b+a)$; 4) $b(a+2b) > ab - 3$.

34 Два мальчика купили одинаковое число марок. Первый выбрал все марки по 5 р. Второй половину марок купил по 3 р., а остальные — по 6 р. Какой мальчик истратил денег больше?

35 Доказать, что если a, b, c — положительные числа и $a > b$, то:

1) $\frac{a+c}{b+c} < \frac{a}{b}$; 2) $\frac{b+c}{a+c} > \frac{b}{a}$.

36 Доказать, что если $a > 0$, $b > 0$, то выполняется неравенство $a^4 + b^4 \geqslant a^3b + ab^3$.

37 Доказать, что если $a > -1$ и $a \neq 1$, то $a^3 + 1 > a^2 + a$.

§ 3 Основные свойства числовых неравенств

В этом параграфе рассматриваются свойства числовых неравенств, которые обычно называют основными, так как они часто используются при доказательстве других свойств неравенств и при решении многих задач.

Теорема 1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

По условию $a > b$ и $b > c$. Это означает, что $a - b > 0$ и $b - c > 0$. Складывая положительные числа $a - b$ и $b - c$, получаем $(a - b) + (b - c) > 0$, т. е. $a - c > 0$. Следовательно, $a > c$.

Геометрически теорема 1 означает, что если на числовой оси точка a лежит правее точки b и точка b лежит правее точки c, то точка a лежит правее точки c (рис. 4).

Теорема 2. Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же число, то знак неравенства не изменится.

Пусть $a > b$. Требуется доказать, что

$$a + c > b + c$$

для любого числа c. Рассмотрим разность

$$(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b.$$

Рис. 4

Эта разность положительна, так как по условию $a > b$. Следовательно, $a + c > b + c$. ○

Следствие. Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

● Пусть $a > b + c$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства число $-c$, получаем $a - c > b + c - c$, т. е. $a - c > b$. ○

Теорема 3. Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

● 1) Пусть $a > b$ и $c > 0$. Докажем, что $ac > bc$. По условию $a - b > 0$ и $c > 0$. Поэтому $(a - b)c > 0$, т. е. $ac - bc > 0$. Следовательно, $ac > bc$.
2) Пусть $a > b$ и $c < 0$. Докажем, что $ac < bc$. По условию $a - b > 0$ и $c < 0$. Поэтому $(a - b)c < 0$, т. е. $ac - bc < 0$. Следовательно, $ac < bc$. ○

Например, умножая обе части неравенства $\frac{1}{5} < 0{,}21$ на 3, получаем $\frac{3}{5} < 0{,}63$, а умножая обе части неравенства $\frac{1}{5} < 0{,}21$ на -4, получаем $-\frac{4}{5} > -0{,}84$.

Заметим, что если $c \neq 0$, то числа c и $\frac{1}{c}$ имеют один и тот же знак. Так как деление на c можно заменить умножением на $\frac{1}{c}$, то из теоремы 3 вытекает следующее утверждение:

Следствие. Если обе части неравенства разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Например, разделив обе части неравенства $0{,}99 < 1$ на 3, получим $0{,}33 < \frac{1}{3}$, а разделив обе части неравенства $0{,}99 < 1$ на -9, получим $-0{,}11 > -\frac{1}{9}$.

Задача 1 Доказать, что если $a > b$, то $-a < -b$.

▶ Умножая обе части неравенства $a > b$ на отрицательное число -1, получаем $-a < -b$. ◁

Например, из неравенства $1{,}9 < 2{,}01$ следует неравенство $-1{,}9 > -2{,}01$; из неравенства $0{,}63 > \frac{3}{5}$ следует неравенство $-0{,}63 < -\frac{3}{5}$.

Задача 2 Доказать, что если a и b — положительные числа и $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

▶ Разделив обе части неравенства $b < a$ на положительное число ab, получаем:

$$\frac{1}{a} < \frac{1}{b}. \quad ◁$$

Отметим, что все свойства неравенств, рассмотренные в этом параграфе, доказаны для неравенства со знаком > (больше).
Точно так же они доказываются и для неравенств со знаком < (меньше).

Упражнения

38 Доказать, что:
1) если $a - 2 < b$ и $b < 0$, то $a - 2$ — отрицательное число;
2) если $a^2 - 5 > a$ и $a > 1$, то $a^2 - 5 > 1$.

39 Выяснить, положительным или отрицательным является число a, если:
1) $a > b$ и $b > 1$; 2) $a < b$ и $b < -2$;
3) $a - 1 < b$ и $b < -1$; 4) $a + 1 > b$ и $b > 1$.

40 Записать неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $-2 < 4$ прибавить число:
1) 5; 2) -7.

41 Записать неравенство, которое получится, если к обеим частям неравенства $2a + 3b > a - 2b$ прибавить число:
1) $2b$; 2) $-a$.

42 Записать неравенство, которое получится, если из обеих частей неравенства $3 > 1$ вычесть число:
1) 1; 2) -5.

43 Записать неравенство, которое получится, если из обеих частей неравенства $a - 2b < 3a + b$ вычесть число:
1) a; 2) b.

44 Пусть $a < b$. Сравнить числа:

1) $a + x$ и $b + x$; 2) $a - 5$ и $b - 5$.

45 Доказать, что:

1) если $4a - 2b > 3a - b$, то $a > b$;
2) если $2b - 3a < 3b - 4a$, то $a < b$;
3) если $b(2a + 1) < a(2b + 1)$, то $a > b$;
4) если $b(1 - 3a) > a(1 - 3b)$, то $a < b$.

46 Доказать, что:

1) если $x(x + 2) < (x - 2)(x + 3)$, то $x < -6$;
2) если $x(x + 6) > (x + 1)(x + 4)$, то $x > 4$;
3) если $(x - 3)^2 < x(x - 5)$, то $x > 9$;
4) если $x(3 + x) < (x + 2)^2$, то $x > -4$.

Умножить обе части данного неравенства на указанное число **(47—48).**

47 1) $3{,}35 < 4{,}5$ на 4; 2) $3{,}8 > 2{,}4$ на 5;
3) $\frac{5}{6} > \frac{2}{3}$ на -12; 4) $\frac{3}{4} < \frac{7}{8}$ на -16.

48 1) $2a > 1$ на 0,5; 2) $4a < -1$ на 0,25;
3) $-4a < -3$ на 0,25; 4) $-2a > -4$ на $-0{,}5$.

Разделить обе части данного неравенства на указанное число **(49—50).**

49 1) $-2 < 5$ на 2; 2) $4{,}5 > -10$ на 5;
3) $-25 > -30$ на -5; 4) $-20 < -12$ на -4.

50 1) $1{,}2a < 4{,}8$ на 1,2; 2) $2{,}3a < -4{,}6$ на 2,3;
3) $-\frac{2}{3}x < -\frac{1}{4}$ на $-\frac{2}{3}$; 4) $-\frac{3}{4}x > \frac{1}{3}$ на $-\frac{3}{4}$.

51 Пусть a — положительное число и $a < 1$. Доказать, что:

1) $a^2 < a$; 2) $a^3 < a^2$.

52 Пусть $a < b$. Сравнить числа:

1) $-4{,}3a$ и $-4{,}3b$; 2) $0{,}19a$ и $0{,}19b$; 3) $\frac{a}{4}$ и $\frac{b}{4}$;
4) $-\frac{a}{6}$ и $-\frac{b}{6}$; 5) $-2(a + 4)$ и $-2(b + 4)$;
6) $\frac{2}{3}(a - 5{,}2)$ и $\frac{2}{3}(b - 5{,}2)$.

53 Доказать, что:

1) если $5a - 2b > 2a + b$, то $a > b$;
2) если $4a - b < 2a + b$, то $a < b$;
3) если $2a + 2b < 6a - 2b$, то $a > b$.

54 Доказать, что:

1) если $(x - 1)(x + 2) > (x + 1)(x - 2)$, то $x > 0$;
2) если $(x + 1)(x - 8) > (x + 2)(x - 4)$, то $x < 0$;
3) если $(x - 3)^2 < (4 + x)(x - 4)$, то $x > \frac{25}{6}$;
4) если $(x - 3)(3 + x) > (x + 2)^2$, то $x < -\frac{13}{4}$.

55 Может ли разность $a - b$ быть:

1) больше суммы $a + b$; 2) меньше суммы $a + b$;
3) равна сумме $a + b$; 4) больше a;
5) больше b; 6) равна b?

Привести примеры.

56 Доказать, что:

1) $a + \frac{1}{a} < -2$, если $a < 0$ и $a \neq -1$;
2) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$, если $ab > 0$ и $a \neq b$;
3) $4y + \frac{1}{y} > 4$, если $y > 0$ и $y \neq \frac{1}{2}$;
4) $9x + \frac{1}{x} < -6$, если $x < 0$ и $x \neq -\frac{1}{3}$.

57 Пусть $a > b$. Доказать, что:

1) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, если $ab > 0$; 2) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, если $ab < 0$.

58 Верно ли, что:

1) если $a < b$, то $\frac{a}{b} < 1$; 2) если $\frac{a}{b} > 1$, то $a > b$;
3) если $\frac{a}{b} < 1$, то $\frac{b}{a} > 1$; 4) если $a^2 < 1$, то $a < 1$?

§ 4 Сложение и умножение неравенств

При решении различных задач часто приходится складывать или умножать почленно левые и правые части неравенств. При этом иногда говорят, что неравенства складываются или умножаются. Например, если турист прошел в первый день более 20 км, а во второй — более 25 км, то можно утверждать, что за два дня он прошел более 45 км. Точно так же если длина прямоугольника меньше 13 см, а ширина меньше 5 см, то можно утверждать, что площадь этого прямоугольника меньше 65 см^2.

При рассмотрении этих примеров применялись следующие *теоремы о сложении и умножении неравенств:*

Теорема 1. При сложении неравенств одинакового знака получается неравенство того же знака: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

● По условию $a - b > 0$ и $c - d > 0$. Рассмотрим разность

$$(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d).$$

Так как сумма положительных чисел положительна, то $(a + c) - (b + d) > 0$, т. е. $a + c > b + d$. ○

Примеры: 1) $+\begin{array}{c} 3 > 2{,}5 \\ 5 > 4 \\ \hline 8 > 6{,}5 \end{array}$ 2) $+\begin{array}{c} 1{,}2 < 1{,}3 \\ -3 < -2 \\ \hline -1{,}8 < -0{,}7 \end{array}$

Теорема 2. При умножении неравенств одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, получается неравенство того же знака: если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

● Рассмотрим разность

$$ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d).$$

По условию $a - b > 0$, $c - d > 0$, $b > 0$, $c > 0$. Поэтому $c(a - b) + b(c - d) > 0$, т. е. $ac - bd > 0$, откуда $ac > bd$. ○

Примеры: 1) $\times\begin{array}{c} 3{,}2 > 3{,}1 \\ 3 > 2 \\ \hline 9{,}6 > 6{,}2 \end{array}$ 2) $\times\begin{array}{c} 1{,}8 < 2{,}1 \\ 4 < 5 \\ \hline 7{,}2 < 10{,}5 \end{array}$

Задача 1 Доказать, что если a, b — положительные числа и $a > b$, то $a^2 > b^2$.

▶ Умножая неравенство $a > b$ само на себя, получаем $a^2 > b^2$. ◁

Аналогично можно доказать, что если a, b — положительные числа и $a > b$, то $a^n > b^n$ при любом натуральном n.

Например, из неравенства $5 > 3$ следуют неравенства $5^5 > 3^5$, $5^7 > 3^7$ и т. д.

Задача 2 Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри треугольника, до его вершин больше полупериметра этого треугольника.

▶ Рассмотрим рисунок 5. Пусть x, y, z — расстояния от внутренней точки M до вершин треугольника ABC.

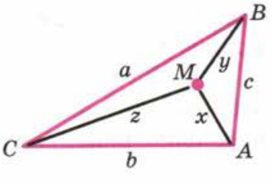


Рис. 5

Из треугольников AMB, AMC, BMC по теореме о сумме длин двух сторон треугольника имеем:

$$x + y > c,$$
$$x + z > b,$$
$$y + z > a.$$

Складывая эти неравенства, получаем:

$$2x + 2y + 2z > a + b + c,$$

откуда $x + y + z > \dfrac{a+b+c}{2}$. ◁

Упражнения

59 (Устно.) Верно ли, что:
1) если $x > 7$ и $y > 4$, то $x + y > 11$;
2) если $x > 5$ и $y > 8$, то $xy < 40$;
3) если $x < -7$ и $y < 7$, то $x + y < 0$;
4) если $x < 2$ и $y < 5$, то $xy < 10$?

60 Выполнить сложение неравенств:
1) $5 > -8$ и $8 > 5$; 2) $-8 < 2$ и $3 < 5$;
3) $3x + y < 2x + 1$ и $3y - 2x < 14 - 2a$;
4) $3x^2 + 2y > 4a - 2$ и $5y - 3x^2 > 3 - 4a$.

61 Выполнить умножение неравенств:
1) $2\frac{2}{3} > 1\frac{1}{3}$ и $12 > 6$; 2) $6\frac{1}{4} < 9\frac{2}{3}$ и $4 < 6$;
3) $x - 2 > 1$ и $x + 2 > 4$; 4) $4 < 2x + 1$ и $3 < 2x - 1$.

62 Доказать, что если $a > 2$ и $b > 5$, то:
1) $3a + 2b > 16$; 2) $ab - 1 > 9$; 3) $a^2 + b^2 > 29$;
4) $a^3 + b^3 > 133$; 5) $(a + b)^2 > 35$; 6) $(a + b)^3 > 340$.

63 Стороны треугольника меньше соответственно 73 см, 1 м 15 см и 1 м 11 см. Доказать, что его периметр меньше 3 м.

64 Куплены 4 тетради и 8 блокнотов. Цена тетради меньше 7 р., а блокнота меньше 40 р. Показать, что стоимость всей покупки меньше 350 р.

65 Пусть $a < 2$, $b > 3$. Доказать, что:
1) $a + 3 < b + 2$; 2) $a - 1 < b - 2$;
3) $b - 3 > a - 2$; 4) $2b > 2a + 2$.

66 Пусть $a > 2$, $b > 3$, $c > 1$. Доказать, что:
1) $a + b + c > 6$; 2) $abc > 6$;
3) $2ab + 3abc > 30$; 4) $abc + 2ac > 10$;
5) $a + ab + abc^2 > 13$; 6) $a^2 + b^2 + c^2 > 13$.

67 Одна сторона прямоугольника больше 7 см, вторая в 3 раза больше первой. Доказать, что периметр прямоугольника больше 56 см.

68 Длина прямоугольного участка в 5 раз больше его ширины, а ширина больше 4 м. Доказать, что площадь участка больше 80 м^2.

69 Доказать, что сумма расстояний от любой точки, лежащей внутри прямоугольника, до его вершин больше полупериметра прямоугольника.

70 Доказать, что:

1) если $x + y > 5$ и $x < 2$, то $y > 3$;
2) если $x - y < -3$ и $x > 4$, то $y > 7$;
3) если $a - 3b < 5$ и $a > -4$, то $b > -3$;
4) если $2a + 3b > 1$ и $a < 2$, то $b > -1$.

71 Пусть $a > 1$. Доказать, что:

1) $a^3 > a$; 2) $a^5 > a^2$.

72 Пусть $a < 1$ и a — положительное число. Доказать, что:

1) $a^3 < a$; 2) $a^5 < a^2$.

73 Пусть $a > b$ и числа a, b отрицательные. Доказать, что:

1) $a^n > b^n$, если n — нечетное натуральное число;
2) $a^n < b^n$, если n — четное натуральное число.

74 Пусть a и b — положительные числа и n — натуральное число. Доказать, что если $a^n > b^n$, то $a > b$.

§ 5 Строгие и нестрогие неравенства

Неравенства со знаком > (больше) и < (меньше) называют *строгими*. Например, $\frac{5}{6} > \frac{1}{2}$, $\frac{3}{4} < 1$, $a > b$, $c < d$ — строгие неравенства.

Наряду со знаками строгих неравенств > и < используются знаки ⩾ (больше или равно) и ⩽ (меньше или равно), которые называют знаками нестрогих неравенств. Неравенство $a \leqslant b$ означает, что $a < b$ или $a = b$, т. е. a не больше b. Например, если число посадочных мест в самолете 134, то число a пассажиров может быть меньшим или равным 134. В этом случае можно записать: $a \leqslant 134$.

Точно так же неравенство $a \geqslant b$ означает, что число a больше или равно b, т. е. a не меньше b. Неравенства, содержащие знак $\geqslant$ или знак $\leqslant$, называют *нестрогими*. Например, $18 \geqslant 12$, $11 \leqslant 12$, $7 \geqslant 7$, $4 \leqslant 4$, $a \geqslant b$, $c \leqslant d$ — нестрогие неравенства.

Все свойства строгих неравенств, сформулированные в § 3—4, справедливы и для нестрогих неравенств. При этом если для строгих неравенств противоположными считались знаки $>$ и $<$, то для нестрогих неравенств противоположными считаются знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

Например, теорема 2 из § 3 справедлива и для нестрогих неравенств: если $a \geqslant b$, то $a + c \geqslant b + c$ для любого числа c. В самом деле, для случая $a > b$ эта теорема доказана в § 3, а для случая $a = b$ это утверждение выражает известное свойство равенств.

Задача Доказать, что неравенство

$$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \qquad (1)$$

верно при любых a и b.

▶ В задаче 3 из § 2 доказано, что при $a \neq b$ выполняется строгое неравенство $a^2 + b^2 > 2ab$. При $a = b$ неравенство (1) превращается в очевидное равенство $2a^2 = 2a^2$. Следовательно, неравенство (1) верно при любых a и b, причем знак равенства имеет место только при $a = b$. ◁

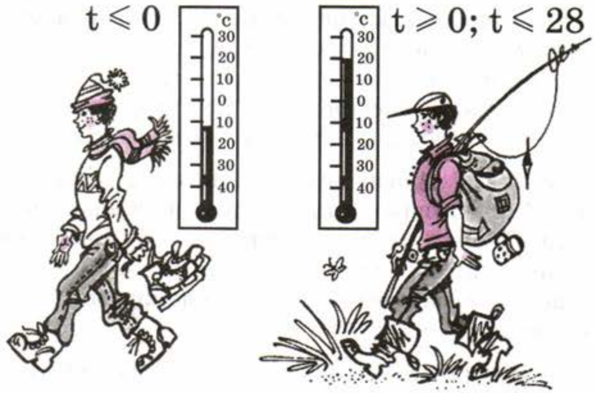
Упражнения

75 Найти наибольшее целое число n, удовлетворяющее неравенству:
1) $n \leqslant -2$; 2) $n \leqslant 3$; 3) $n < 4$;
4) $n < -5$; 5) $n \leqslant 0{,}2$; 6) $n \leqslant -0{,}3$.

76 Найти наименьшее целое число n, удовлетворяющее неравенству:
1) $n \geqslant -3$; 2) $n \geqslant 6$; 3) $n > 6$;
4) $n > -4$; 5) $n > -4{,}21$; 6) $n \geqslant 3{,}24$.

77 Найти наибольшее целое число x, удовлетворяющее неравенству:
1) $\frac{x}{6} \leqslant 1$; 2) $\frac{x}{4} < -2$.

78 Записать, используя знаки неравенства, утверждения:
1) сегодня в Москве 0 °C, а в Санкт-Петербурге температура (t °C) не выше, чем в Москве;



2) вода поднялась на высоту (h м), не меньшую 5 м;
3) температура (t °C) воды в жидком состоянии при нормальном давлении не меньше 0 °C; не больше 100 °C;
4) скорость (v км/ч) движения автомобильного транспорта в городе не больше 60 км/ч.

79 Пусть $a \leqslant b$. Верно ли неравенство:
1) $a - 3 \leqslant b - 3$; 2) $5a \leqslant 5b$;
3) $a + 2{,}5 < b + 2{,}5$; 4) $a - 4 > b - 4$?

80 Пусть $a \geqslant b$. Верно ли неравенство:
1) $-2a > -2b$; 2) $-3a \leqslant -3b$;
3) $\frac{a}{12} \geqslant \frac{b}{12}$; 4) $\frac{a}{15} < \frac{b}{15}$?

81 Доказать, что:
1) если $a - b \geqslant 4a + 5b$, то $a \leqslant -2b$;
2) если $a - 2b \leqslant 5a + 4b$, то $2a \geqslant -3b$;
3) если $(x+2)(x-3) \leqslant (x+3)(x-2)$, то $x \geqslant 0$;
4) если $(x-5)(x+1) \geqslant (x+5)(x-1)$, то $x \leqslant 0$.

82 Доказать, что при всех значениях x верно неравенство:
1) $(x-1)(x+3) \leqslant (x+1)^2$; 2) $(x+2)^2 \geqslant (x+1)(x+3)$.

83 Доказать, что:
1) $4x^2 + 1 \geqslant 4x$ при любом x;
2) $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a > 0$;
3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, если $ab > 0$;
4) $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{b}$, если $a \geqslant b$ и $ab > 0$;
5) $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$, если $a \geqslant b$ и $ab < 0$;
6) $a^2 + b^2 \geqslant \frac{1}{2}$, если $a + b = 1$.

§ 6 Неравенства с одним неизвестным

Задача Из двух городов отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда с одинаковыми постоянными скоростями. С какой скоростью должны двигаться поезда, чтобы через 2 ч после начала движения сумма расстояний, пройденных ими, была не менее 200 км?

▶ Пусть x километров в час — искомая скорость движения поездов. За 2 ч каждый из поездов пройдет путь $2x$ километров.

По условию задачи сумма расстояний, пройденных поездами за 2 ч, должна быть не меньше 200 км:

$$2x+2x\geqslant 200.$$

Отсюда $4x\geqslant 200$, $x\geqslant 50$.

Ответ Скорость движения каждого поезда должна быть не меньше 50 км/ч. ◁

В неравенстве $4x\geqslant 200$ буквой x обозначено неизвестное число. Это пример *линейного неравенства с одним неизвестным*. Неравенства вида

$$ax>b,\ ax<b,\ ax\geqslant b,\ ax\leqslant b,$$

в которых a и b — заданные числа, а x — неизвестное, называют линейными неравенствами с одним неизвестным.

Многие неравенства, например

$$4(3-x)>5+2x,\quad \frac{x-3}{2}\leqslant\frac{x-2}{3},\quad 1-\frac{x}{2}<3(x+4),$$

сводятся к линейным неравенствам.

Выражения, стоящие слева и справа от знака неравенства, называют соответственно *левой и правой частями неравенства*. Каждое слагаемое левой и правой частей неравенства называют *членом неравенства*.

Например, в неравенстве $2x-5\geqslant 4+3x$ левая часть $2x-5$, правая часть $4+3x$; $2x$, -5, 4 и $3x$ — члены неравенства.

Если в неравенство $2x + 2x \geqslant 200$, полученное в задаче, подставить $x = 50$, $x = 51$, $x = 60$, то получатся верные числовые неравенства:

$$2 \cdot 50 + 2 \cdot 50 \geqslant 200; \quad 2 \cdot 51 + 2 \cdot 51 \geqslant 200;$$
$$2 \cdot 60 + 2 \cdot 60 \geqslant 200.$$

Каждое из чисел 50, 51, 60 называют решением неравенства $2x + 2x \geqslant 200$.

Решением неравенства с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.
Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Неизвестное число в неравенстве может быть обозначено любой буквой. Например, в неравенствах

$$3(y - 5) < 2(4 - y), \quad 2t - 1 \geqslant 4(t + 3),$$
$$5 - \frac{z}{2} > \frac{z}{3} - 4$$

неизвестные обозначены соответственно буквами y, t, z.

Упражнения

84 Записать в виде неравенства утверждение:
1) сумма чисел x и 17 больше 18;
2) разность чисел 13 и x меньше 2;
3) произведение чисел 17 и x не меньше 3;
4) удвоенная сумма чисел x и -3 не больше 2;
5) полусумма чисел x и 3 не больше их произведения;
6) удвоенное произведение чисел x и -4 не меньше их разности.

85 Какие из чисел $10, \frac{1}{2}, 0, -1, -2, -5$ являются решениями неравенства:
1) $3x + 4 > 2$; 2) $3x + 4 \leqslant x$;
3) $\frac{1}{2}x - 3 \geqslant 1 - x$; 4) $3 - x \geqslant \frac{1}{2}x$?

86 При каких значениях y верно неравенство:
1) $-2y > 0$; 2) $-3y < 0$; 3) $y^2 + 1 \geqslant 0$;
4) $2y^2 + 3 \geqslant 0$; 5) $(y - 1)^2 \leqslant 0$; 6) $(y + 2)^2 > 0$?

87 На рисунке 6 изображен график линейной функции $y = kx + b$. Записать, какие значения принимает y, если:

1) $x \geqslant 0$; 2) $x < 0$;
3) $x > -5$; 4) $x \leqslant -5$.

88 На рисунке 7 изображен график линейной функции $y = kx + b$. Записать, при каких значениях x значения функции:
1) положительны;
2) неотрицательны;
3) отрицательны;
4) меньше -4;
5) не меньше -4;
6) больше -4.

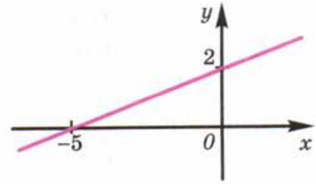


Рис. ***6***

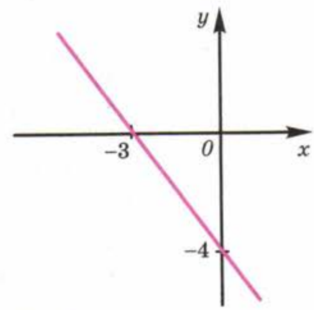


Рис. ***7***

89 С помощью графика функции найти, при каких значениях x значения функции положительны, отрицательны, больше 1, меньше 1:
1) $y = 2x + 4$; 2) $y = 3x - 9$;
3) $y = -2x - 8$; 4) $y = -3x + 6$.

§ 7 Решение неравенств

Решение неравенств с одним неизвестным, которые сводятся к линейным, основано на свойствах числовых неравенств, рассмотренных в § 3. Приведем примеры решения неравенств.

Задача 1 Решить неравенство $x + 1 > 7 - 2x$.

▶ Предположим, что число x_0 является решением данного неравенства, т. е. неравенство $x_0 + 1 > 7 - 2x_0$ является верным. Перенесем член $-2x_0$ из правой части неравенства в левую, изменив его знак на противоположный, а число +1 перенесем в правую часть с противоположным знаком. В результате получим верное неравенство $x_0 + 2x_0 > 7 - 1$.

В обеих частях этого неравенства приведем подобные члены:

$$3x_0 > 6.$$

Разделив обе части этого неравенства на 3, найдем $x_0 > 2$.

Итак, предположив, что x_0 — решение исходного неравенства, мы получили, что $x_0 > 2$. Чтобы убедиться в том, что любое значение x, большее 2, является решением неравенства, достаточно провести все рассуждения в обратном порядке.

Пусть $x > 2$. Применяя свойства верных числовых неравенств, последовательно получаем:

$$3x > 6,$$
$$x + 2x > 7 - 1,$$
$$x + 1 > 7 - 2x.$$

Следовательно, любое число x, большее 2, является решением данного неравенства.

Ответ $x > 2$. ◁

При записи решения неравенства можно не давать подробных объяснений. Например, решение задачи 1 можно записать так:

$$x + 1 > 7 - 2x,$$
$$3x > 6,$$
$$x > 2.$$

Итак, при решении неравенств используются следующие *основные свойства*:

Свойство 1. Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого члена на противоположный; при этом знак неравенства не меняется.

Свойство 2. Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю; если это число положительно, то знак неравенства не меняется, а если это число отрицательно, то знак неравенства меняется на противоположный.

Эти свойства позволяют заменять данное неравенство другим, имеющим те же решения.

Для решения неравенства с одним неизвестным, которое сводится к линейному, нужно:

1) перенести члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1);

2) приведя подобные члены, разделить обе части неравенства на коэффициент при неизвестном, если он не равен нулю (свойство 2).

Задача 2 Решить неравенство

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2.$$

▶ Упростим левую и правую части неравенства. Раскроем скобки:

$$3x-6-4x-4<2x-6-2.$$

Перенесем члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а члены, не содержащие неизвестное, в правую (свойство 1):

$$3x-4x-2x<6+4-6-2.$$

Приведем подобные члены: $-3x<2$ и разделим обе части на -3 (свойство 2): $x>-\frac{2}{3}$.

Ответ $x>-\frac{2}{3}$. ◁

Это решение коротко можно записать так:

$$3(x-2)-4(x+1)<2(x-3)-2,$$
$$3x-6-4x-4<2x-6-2,$$
$$-x-10<2x-8,$$
$$-3x<2,$$
$$x>-\frac{2}{3}.$$

Множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $x>-\frac{2}{3}$, на числовой оси изображается лучом (рис. 8). Точка $x=-\frac{2}{3}$ не принадлежит этому лучу, на рисунке 8 она изображена светлым кружком, а луч отмечен штриховкой. Множество чисел x, удовлетворяющих, например, неравенству $x \geqslant 2$, иногда называют *лучом*. Точка $x=2$ принадлежит этому лучу. На рисунке 9 эта точка изображена темным кружком.

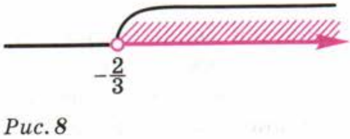


Рис. 8

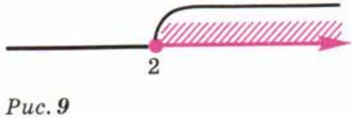


Рис. 9

Задача 3 Решить неравенство $\frac{x-5}{6}+1 \geqslant \frac{5x}{2}-\frac{x-3}{3}$.

▶ Умножим обе части неравенства на 6:

$$6\cdot\frac{x-5}{6}+6\cdot 1 \geqslant 6\cdot\frac{5x}{2}-6\cdot\frac{x-3}{3},$$
$$(x-5)+6 \geqslant 15x-2(x-3).$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$x-5+6 \geqslant 15x-2x+6,$$
$$x+1 \geqslant 13x+6,$$

откуда

$$-12x \geqslant 5, \quad x \leqslant -\frac{5}{12}.$$

Ответ $x \leqslant -\frac{5}{12}$. ◁

Множество решений этого неравенства, т. е. множество чисел $x \leqslant -\frac{5}{12}$, изображено на рисунке 10.

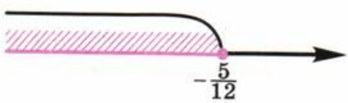


Рис. 10

В рассмотренных примерах неравенства после упрощения сводились к линейным, у которых коэффициент при неизвестном был не равен нулю. В некоторых случаях этот коэффициент может быть равен нулю. Приведем примеры таких неравенств.

Задача 4 Решить неравенство

$$2(x+1)+5>3-(1-2x).$$

▶ Упростим обе части неравенства:

$$2x+2+5>3-1+2x,$$
$$2x+7>2+2x,$$

откуда

$$2x-2x>2-7,$$
$$0 \cdot x>-5.$$

Последнее неравенство является верным при любом значении x, так как его левая часть при любом x равна нулю, а $0>-5$. Следовательно, любое значение x является решением данного неравенства.

Ответ x — любое число. ◁

Задача 5 Решить неравенство

$$3(2-x)-2>5-3x.$$

▶ Упростим левую часть неравенства:

$$6-3x-2>5-3x,$$
$$4-3x>5-3x,$$

откуда

$$-3x+3x>5-4,$$
$$0 \cdot x>1.$$

Последнее неравенство не имеет решений, так как левая часть неравенства при любом значении x равна нулю, а неравенство $0 > 1$ неверно. Следовательно, исходное неравенство не имеет решений.

Ответ Решений нет. ◁

Упражнения

Решить неравенство (**90—91**).

90 1) $x+2 \geqslant 15$; 2) $x-6<8$; 3) $3 \leqslant y+6$;
4) $-4>5-y$; 5) $2z \geqslant z-7$; 6) $3z \leqslant 2z+4$.

91 1) $12x>-36$; 2) $-7x \leqslant 56$; 3) $\frac{y}{4} \leqslant 7$;
4) $-5<\frac{z}{3}$; 5) $7{,}2z>-27$; 6) $-4{,}5x \geqslant 9$.

Решить неравенство и изобразить множество его решений на числовой оси (**92—93**).

92 1) $2x-16>0$; 2) $18-3x>0$; 3) $3x-15<0$;
4) $25-5x<0$; 5) $9-3x \geqslant 0$; 6) $2x+4 \leqslant 0$.

93 1) $3(x+1) \leqslant x+5$; 2) $4(x-1) \geqslant 5+x$;
3) $2(x-3)+4<x-2$; 4) $x+2<3(x+2)-4$;
5) $\frac{x-1}{3} \geqslant \frac{2x-3}{5}$; 6) $\frac{3x-2}{4} \geqslant \frac{2x-1}{3}$.

94 Выяснить, при каких значениях x выражение принимает положительные значения:
1) $\frac{3}{8}x+4$; 2) $\frac{5}{2}-4x$; 3) $2(x+3)+3x$;
4) $3(x-5)-8x$; 5) $\frac{1}{3}-2(x+4)$; 6) $\frac{1}{2}-3(x-5)$.

95 Выяснить, при каких значениях y выражение принимает отрицательные значения:
1) $5-\frac{2}{3}y$; 2) $\frac{3}{4}-2y$; 3) $\frac{y-2}{3}+\frac{1}{3}$;
4) $\frac{8y-3}{5}-\frac{2}{5}$; 5) $\frac{3y-5}{2}-\frac{y}{2}$; 6) $\frac{4-5y}{6}-\frac{y}{6}$.

96 Найти наименьшее целое число, являющееся решением неравенства:
1) $4(y-1)<2+7y$; 2) $4y-9>3(y-2)$;
3) $3(x-2)-2x<4x+1$; 4) $6x+1 \geqslant 2(x-1)-3x$.

97 Найти наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:
1) $5-2x>0$; 2) $6x+5 \leqslant 0$;
3) $3(1-x)>2(2-x)$; 4) $4(2-x)<5(1-x)$.

Решить неравенство (98—99).

98 1) $\frac{3x}{2}-\frac{3}{5}<4x+3$; 2) $\frac{x}{5}-5>1\frac{3}{4}-\frac{5x}{2}$;

3) $\frac{4-3y}{2}-\frac{8y+1}{6}<15y-6$; 4) $8+\frac{3y-2}{4}>\frac{y-1}{6}-\frac{5y+4}{3}$.

99 1) $\frac{x+1}{2}-2x\leqslant\frac{x-2}{3}+\frac{x}{2}$; 2) $\frac{x-4}{3}+3x\geqslant\frac{x}{3}-\frac{x+1}{4}$;

3) $\frac{2x-1}{2}-\frac{2x}{5}>\frac{3x-2}{5}-\frac{x}{4}$; 4) $\frac{3x+1}{4}-\frac{x}{2}<\frac{5x-2}{3}+\frac{3x}{5}$.

100 1) При каких a значение дроби $\frac{a}{3}$ больше значения дроби $\frac{a+1}{4}$?

2) При каких b значение дроби $\frac{b+3}{2}$ меньше значения дроби $\frac{b-1}{5}$?

3) При каких x значение дроби $\frac{3x-5}{6}$ больше значения разности дробей $\frac{6x-7}{15}$ и $\frac{3-x}{9}$?

4) При каких x значение суммы дробей $\frac{2-5x}{4}$ и $\frac{7x-3}{6}$ меньше значения дроби $\frac{2x+5}{18}$?

Решить неравенство (101—104).

101 1) $3(x-2)+x<4x+1$; 2) $5(x+2)-x>3(x-1)+x$;

3) $\frac{3x+6}{4}-\frac{x}{4}>\frac{x+2}{2}$; 4) $\frac{2x-1}{5}-4<x-\frac{3x+1}{5}$;

5) $5x+1\geqslant2(x-1)+3x+3$; 6) $\frac{x+4}{2}-x\leqslant2-\frac{x}{2}$.

102 1) $5(x+2)+2(x-3)<3(x-1)+4x$;

2) $3(2x-1)+3(x-1)>5(x+2)+2(2x-3)$;

3) $\frac{5x+3}{2}-1\geqslant3x-\frac{x-7}{2}$;

4) $2-\frac{x-4}{3}\leqslant2x-\frac{7x-4}{3}$.

103 1) $(x-1)^2+7>(x+4)^2$;

2) $(1+x)^2+3x^2<(2x-1)^2+7$;

3) $(x+3)(x-2)\geqslant(x+2)(x-3)$;

4) $(x+1)(x-4)+4\geqslant(x+2)(x-3)-x$.

104 1) $\frac{2}{3x+6}<0$; 2) $\frac{3}{2x-4}>0$; 3) $\frac{-1,7}{0,5x-2}>0$;

4) $\frac{-2,3}{0,4x+8}<0$; 5) $\frac{-1,7}{2,1+6,3x}<0$; 6) $\frac{-3,8}{3,2-6,4x}>0$.

105 При каких x значения функции $y=2,5x-4$:
1) положительны; 2) отрицательны;
3) больше 1; 4) меньше -4?

106 При каких x значения функции $y=3,5-0,5x$:
1) положительны; 2) неотрицательны;
3) не больше 3,5; 4) не меньше 1?

107 Построить график функции $y=3-2x$. С помощью графика найти значения x, при которых точки графика лежат:
1) выше оси абсцисс; 2) выше прямой $y=2$;
3) ниже оси абсцисс; 4) ниже прямой $y=4$.
Результаты проверить, составляя и решая соответствующие неравенства.

108 Сколько железнодорожных платформ потребуется для перевозки 183 контейнеров, если на одной платформе можно разместить не более 5 контейнеров?

109 Рабочий по плану должен изготовить 40 деталей. Сколько деталей он должен изготовить, чтобы перевыполнить план более чем на 7%?

110 Одна сторона треугольника равна 8 см, а другая — 13 см.
1) Каким наименьшим целым числом сантиметров может быть длина третьей стороны?
2) Каким наибольшим целым числом сантиметров может быть длина третьей стороны?

111 Сумма нечетного числа с тремя последующими нечетными числами больше 49. Найти наименьшее нечетное число, удовлетворяющее этому условию.

112 Сумма четного числа с утроенным последующим четным числом меньше 69. Найти наибольшее четное число, удовлетворяющее этому условию.

113 Из двух пунктов, находящихся на расстоянии 60 км, отправляются одновременно навстречу друг другу пешеход и велосипедист с постоянными скоростями. Скорость движения пешехода равна 4 км/ч. С какой скоростью должен двигаться велосипедист, чтобы его встреча с пешеходом произошла не позже чем через 3 ч после начала движения?

114 На соревнованиях велосипедисты должны проехать 155 км. Велосипедисты стартуют поочередно с интервалом 5 мин, и каждый из них едет с постоянной скоростью. Скорость первого велосипедиста равна 30 км/ч. С какой скоростью должен двигаться третий велосипедист, чтобы прибыть к финишу раньше первого?

115 При каких значениях x точки графика функции $y=3x+4,5$ лежат выше точек графика функции $y=-2x+1$?

116 При каких значениях x точки графика функции $y=5x-4$ лежат ниже точек графика функции $y=0,5x+5$?

117 На какое наименьшее целое число сантиметров нужно увеличить длину окружности, чтобы ее радиус увеличился более чем на 10 см? (Длина c окружности радиуса R равна: $c = 2\pi R$, где $\pi = 3{,}14\ldots$.)

§ 8 Системы неравенств с одним неизвестным. Числовые промежутки

1. Системы неравенств.

Задача В пустой бассейн вместимостью 4000 л начали наливать воду. Сколько литров воды в час нужно наливать в бассейн, чтобы через 4 ч было заполнено более половины всего бассейна и чтобы через 5 ч бассейн не переполнился?

▶ Пусть x литров — количество воды, поступающей в бассейн за 1 ч. По условию задачи $4x > 2000$, $5x \leqslant 4000$. Из первого неравенства получим $x > 500$, а из второго $x \leqslant 800$.

Ответ За час нужно вливать в бассейн больше 500 л воды, но не больше 800 л воды. ◁

В неравенствах $4x > 2000$ и $5x \leqslant 4000$ неизвестное число x одно и то же. Поэтому эти неравенства рассматривают совместно и говорят, что они образуют *систему неравенств*:

$$\begin{cases} 4x > 2000, \\ 5x \leqslant 4000. \end{cases} \qquad (1)$$

Фигурная скобка показывает, что нужно найти такие значения x, при которых оба неравенства системы (1) обращаются в верные числовые неравенства. Система (1) — пример *системы линейных неравенств с одним неизвестным*.

Приведем еще примеры систем неравенств с одним неизвестным, сводящихся к системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} 3(x+1) > 5, \\ 4(x-1) > x-2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-1 \geqslant 3x, \\ 5(x-1) \leqslant 8. \end{cases}$$

Решением системы неравенств с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.
Решить систему неравенств — это значит найти все решения этой системы или установить, что их нет.

Например, $x=1$ является решением системы

$$\begin{cases} 2x \geqslant -4, \\ 3x \leqslant 9, \end{cases} \qquad (2)$$

так как при $x=1$ оба неравенства системы (2) верны:

$$\begin{cases} 2\cdot 1 \geqslant -4, \\ 3\cdot 1 \leqslant 9. \end{cases}$$

Разделив обе части первого неравенства системы (2) на 2, а второго — на 3, получим:

$$\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \leqslant 3. \end{cases}$$

Следовательно, решениями системы (2) являются все значения x, которые не меньше -2 и не больше 3.
Неравенства $x \geqslant -2$ и $x \leqslant 3$ можно записать в виде *двойного неравенства*:

$$-2 \leqslant x \leqslant 3.$$

2. Числовые промежутки.

Решениями систем неравенств с одним неизвестным являются различные числовые множества. Эти множества имеют свои названия.

Рис. 11

Так, на числовой оси множество чисел x, таких, что $-2 \leqslant x \leqslant 3$, изображается отрезком с концами в точках -2 и 3 (рис. 11).
Поэтому множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-2 \leqslant x \leqslant 3$, называют отрезком и обозначают $[-2; 3]$.

Если $a < b$, то множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, называется *отрезком* и обозначается $[a; b]$.

Например, отрезок $[4; 7]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $4 \leqslant x \leqslant 7$. Для мно-

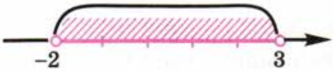


Рис. ***12***

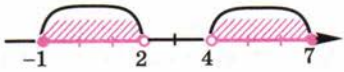


Рис. ***13***

жеств чисел, удовлетворяющих неравенствам вида $2 < x < 7$, $-1 \leqslant x < 2$, $4 < x \leqslant 7$, также вводятся специальные названия.

Если $a < b$, то множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, называется *интервалом* и обозначается $(a; b)$.

Например, интервал $(-2; 3)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-2 < x < 3$ (рис. 12).

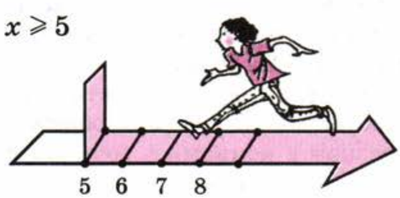
Множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам вида $x > a$ и $x < a$ также называют интервалом.

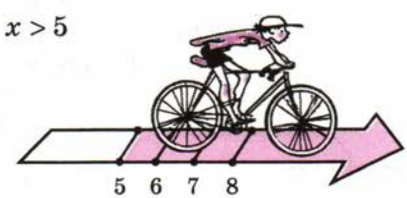
Множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$, называются *полуинтервалами* и обозначаются соответственно $[a; b)$ и $(a; b]$.

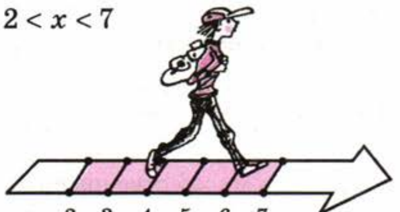
Например, полуинтервал $[-1; 2)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant x < 2$; полуинтервал $(4; 7]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $4 < x \leqslant 7$ (рис. 13).

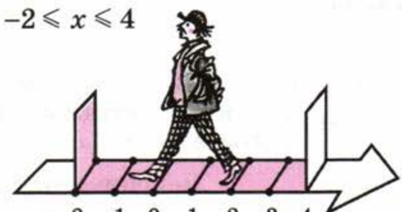
Отрезки, интервалы, полуинтервалы и лучи называют *числовыми промежутками*.

Таким образом, числовые промежутки можно задавать в виде неравенств.









Упражнения

118 Какие из чисел -3; 10; 12 являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 5 - x \leqslant 9, \\ 2 - 3x > -4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{3}x - 2 > 1, \\ 5 - 2x > -25? \end{cases}$

119 Какие из чисел -2; 0; 1; 2 являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 12x - 1 < 11, \\ -3 - x \leqslant 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x - 1 \geqslant 4 - x, \\ x + 6 > 2? \end{cases}$

120 Найти все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x \leqslant 3, \\ x > -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant 2{,}7, \\ x \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geqslant -5{,}1, \\ x < 5{,}1. \end{cases}$

121 Множество чисел x, удовлетворяющих данному двойному неравенству, записать с помощью обозначений числового промежутка и изобразить его на числовой оси:

1) $1 \leqslant x \leqslant 5$; 2) $-1 \leqslant x \leqslant 3$; 3) $-1 < x < 4$;
4) $1 < x < 2$; 5) $-3 \leqslant x < 1$; 6) $-4 < x \leqslant -2$.

122 Множество чисел x, принадлежащих данному числовому промежутку, записать в виде двойного неравенства и изобразить его на числовой оси:

1) $[-4; 0]$; 2) $[-3; -1]$; 3) $(-4; -2)$;
4) $(0; 3)$; 5) $(-1; 4]$; 6) $[-2; 2)$.

123 Записать в виде двойного неравенства, а также с помощью обозначений числового промежутка множество чисел x, изображенное на рисунке 14.

124 Имеют ли общие точки отрезок $[2; 3]$ и интервал $(1; 4)$?

125 Имеют ли общие точки отрезки $[2; 4]$ и $[3; 5]$?

126 На одной координатной плоскости построить графики функций $y = -2x - 2$ и $y = 2 - \frac{x}{2}$. Отметить на оси абсцисс множество значений x, при которых значения обеих функций: 1) положительны; 2) отрицательны.

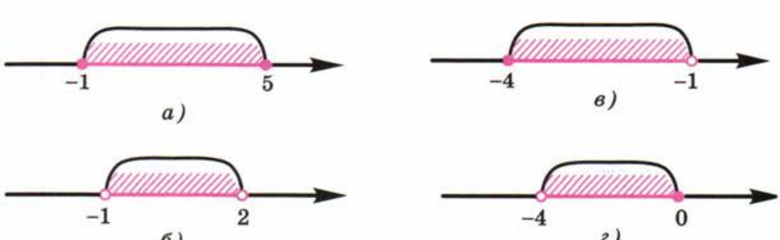


Рис. 14

№ 2

СТОРОНЫ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ВЫРАЖАЮТСЯ НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ. КАКОЙ ДЛИНЫ ДОЛЖНЫ ОНИ БЫТЬ, ЧТОБЫ ЗНАЧЕНИЕ ПЕРИМЕТРА ПРЯМОУГОЛЬНИКА БЫЛО РАВНО ЗНАЧЕНИЮ ЕГО ПЛОЩАДИ?

127 На одной координатной плоскости изображены графики двух линейных функций (рис. 15). Указать значения x (если они существуют), при которых значения обеих функций одновременно положительны; отрицательны.

128 Решить неравенство:

1) $(x-3)(2x-3)+6x^2 \leqslant 2(2x-3)^2$;
2) $(5-6x)(1+3x)+(1+3x)^2 \leqslant (1+3x)(1-3x)$;
3) $(2x+1)(4x^2-2x+1)-8x^3 \geqslant -2(x+3)$;
4) $(x-2)(x^2+2x+4) \leqslant x(x^2+2)+1$.

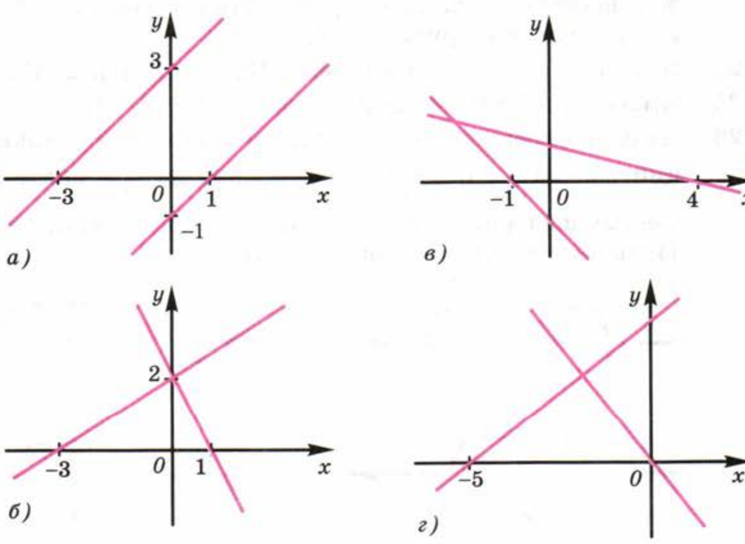


Рис. 15

§ 9 Решение систем неравенств

Рассмотрим примеры решения систем неравенств.

Задача 1 Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 5x-1>3(x+1), \\ 2(x+4)>x+5. \end{cases} \qquad (1)$$

▶ Решим первое неравенство:

$$5x-1>3x+3, \quad 2x>4, \quad x>2.$$

Итак, первое неравенство выполняется при $x>2$. Решим второе неравенство:

$$2x+8>x+5, \quad x>-3.$$

Итак, второе неравенство системы (1) выполняется при $x>-3$.

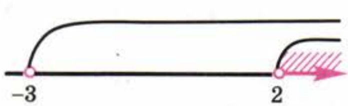


Рис. 16

Изобразим на числовой оси множества решений первого и второго неравенств системы (1).

Решения первого неравенства — интервал $x>2$, решения второго неравенства — интервал $x>-3$ (рис. 16).

Решениями системы (1) являются такие значения x, которые одновременно принадлежат обоим интервалам. Из рисунка видно, что множество всех общих точек этих интервалов — интервал $x>2$.

Ответ $x>2$. ◁

Задача 2 Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3(x-1)\leqslant 2x+4, \\ 4x-3\geqslant 13. \end{cases} \qquad (2)$$

▶ Решим первое неравенство:

$$3x-3\leqslant 2x+4, \quad x\leqslant 7.$$

Решим второе неравенство системы (2):

$$4x\geqslant 16, \quad x\geqslant 4.$$

Изобразим на числовой оси множества решений первого и второго неравенств системы (2). Решения

Рис. 17

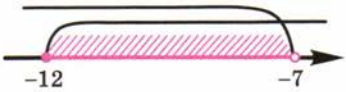


Рис. 18

первого неравенства — луч $x \leqslant 7$, решения второго неравенства — луч $x \geqslant 4$ (рис. 17).
Из рисунка видно, что множество общих точек этих лучей — отрезок [4; 7].

Ответ $4 \leqslant x \leqslant 7$. ◁

Задача 3 Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \dfrac{5x}{12} + \dfrac{4}{3} \leqslant \dfrac{x+1}{3}, \\ 2 - \dfrac{5x}{14} < \dfrac{2-x}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

▶ Решим первое неравенство системы (3):

$$5x + 16 \geqslant 4x + 4, \quad x \geqslant -12.$$

Решим второе неравенство:

$$28 - 5x < 14 - 7x, \quad 2x < -14, \quad x < -7.$$

Изобразим на числовой оси промежутки $x \geqslant -12$ и $x < -7$ (рис. 18).
Из рисунка видно, что множество общих точек этих промежутков — полуинтервал [–12; –7).

Ответ $-12 \leqslant x < -7$. ◁

Задача 4 Показать, что система неравенств

$$\begin{cases} 2(1-x) < 4 - 3x, \\ 10 - 3x < 1 \end{cases} \qquad (4)$$

не имеет решений.

▶ Решим первое неравенство:

$$2 - 2x < 4 - 3x, \quad x < 2.$$

Решим второе неравенство системы (4):

$$-3x < -9, \quad x > 3.$$

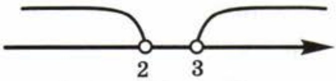


Рис. 19

Изобразим на числовой оси интервалы $x < 2$ и $x > 3$ (рис. 19).
Из рисунка видно, что эти интервалы не имеют общих точек. Следовательно, система (4) не имеет решений. ◁

Упражнения

Записать множество решений системы неравенств одним неравенством и изобразить его на числовой оси **(129—130)**.

129 1) $\begin{cases} x > 2, \\ x > 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 0, \\ x > -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 2, \\ x \geqslant -3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geqslant -2, \\ x \geqslant -4. \end{cases}$

130 1) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 0, \\ x < -1; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < -2, \\ x < -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 1, \\ x \leqslant 0. \end{cases}$

Записать множество решений системы неравенств двойным неравенством и изобразить его на числовой оси **(131—133)**.

131 1) $\begin{cases} x > 2, \\ x < 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 3, \\ x < 6; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x < 0, \\ x \geqslant -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x < \frac{1}{2}. \end{cases}$

132 1) $\begin{cases} x \leqslant -2, \\ x \geqslant -7{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x < 1{,}5, \\ x \geqslant -1{,}5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x \geqslant 0{,}8, \\ x < 2{,}2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 7{,}5, \\ x \geqslant -0{,}5. \end{cases}$

Решить систему неравенств **(133—137)**.

133 1) $\begin{cases} 3x - 18 > 0, \\ 4x > 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x - 14 \geqslant 0, \\ 2x \geqslant 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5 > 0, \\ 3x + 6 \geqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 7 \geqslant 0, \\ 5x + 15 > 0. \end{cases}$

134 1) $\begin{cases} 3 - 2x \geqslant 0, \\ 4x + 8 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 4 \leqslant 0, \\ 4 - 3x > 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3 \leqslant 0, \\ 3x + 9 \leqslant 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 9 < 0, \\ 12 > 3x. \end{cases}$

135 1) $\begin{cases} 7 - 2x \geqslant 0; \\ 5x - 20 < 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5 \leqslant 0, \\ 9x + 18 \leqslant 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6 - 2x > 0, \\ 3x + 6 > 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10 - 2x \geqslant 0, \\ 4x - 8 \geqslant 0. \end{cases}$

136 1) $\begin{cases} 3x + 3 \leqslant 2x + 1, \\ 3x - 2 \leqslant 4x + 2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4x + 2 \geqslant 5x + 3, \\ 2 - 3x < 7 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(x + 1) - x > 2x + 2, \\ 4(x + 1) - 2 \leqslant 2(2x + 1) - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2(x - 1) - 3 < 5(2x - 1) - 7x, \\ 3(x + 1) - 2 \leqslant 6(1 - x) + 7. \end{cases}$

137 1) $\begin{cases} 5(x+1) \leqslant 3(x+3)+1, \\ \dfrac{2x-1}{7} \leqslant \dfrac{x+1}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2(2x+1)+x > 3(x-1)+4, \\ \dfrac{2x-1}{3} \geqslant \dfrac{3x-2}{4}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-5}{6} \leqslant \dfrac{3x-1}{4}, \\ \dfrac{x+2}{3} > \dfrac{x+3}{5}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2} \geqslant \dfrac{2x+7}{5}, \\ \dfrac{2x-3}{7} < \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{5}{21}. \end{cases}$

Решить систему неравенств **(138—140)**.

138 1) $\begin{cases} \dfrac{3-2x}{15} \leqslant \dfrac{x-2}{3} + \dfrac{x}{5}, \\ \dfrac{1-3x}{12} \geqslant \dfrac{5x-1}{3} - \dfrac{7x}{4}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5x+7}{6} - \dfrac{3x}{4} < \dfrac{11x-7}{12}, \\ \dfrac{1-3x}{2} - \dfrac{1-4x}{3} \geqslant \dfrac{x}{6} - 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{6x-5}{3} - \dfrac{11}{5} < \dfrac{4x+3}{5} - 0{,}6, \\ \dfrac{8x+1}{2} - \dfrac{9x}{5} < \dfrac{6x-1}{5} + 0{,}1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{8x+1}{3} > \dfrac{4x+9}{2} - \dfrac{x-1}{3}, \\ \dfrac{5x-2}{3} < \dfrac{2x+13}{2} - \dfrac{x+2}{3}. \end{cases}$

139 1) $\begin{cases} 2(4x-1)-3x < 5(x+2)+7, \\ \dfrac{x-2}{3} \leqslant \dfrac{x-3}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{3(x-1)}{2} - 1{,}3x \geqslant \dfrac{x}{5} - 1{,}5, \\ \dfrac{x-3}{5} < \dfrac{x+5}{3}. \end{cases}$

140 1) $\begin{cases} 3(x+8) \geqslant 4(7-x), \\ (x+2)(x-5) > (x+3)(x-4); \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x+3)(x-6) \leqslant (x+2)(x+1)+4, \\ 2(6x-1) \geqslant 7(2x-4); \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x+2 > x-2, \\ x+15 > 6-2x, \\ 5x+11 \leqslant x+23; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x-4 < 8x+6, \\ 2x-1 > 5x-4, \\ 11x-9 \leqslant 5x+3. \end{cases}$

141 Найти все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} 0{,}2x > -1, \\ -\dfrac{x}{3} \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 0{,}5x \geqslant 0, \\ -\dfrac{x+5}{5} < -1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2} < \dfrac{x}{3}, \\ \dfrac{x+1}{2} \geqslant \dfrac{x}{5}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x-1}{4} \leqslant \dfrac{x}{5}, \\ \dfrac{x}{3} > \dfrac{x+4}{7}. \end{cases}$

142 Указать значения x (если они существуют), при которых значения функций $y = 0{,}5x + 2$ и $y = 3 - 3x$ одновременно:

1) положительны; 2) отрицательны;
3) больше 3; 4) меньше 3.

Ответ проиллюстрировать с помощью графиков данных функций, построенных на одной координатной плоскости.

143 При каких x значения функций $y = x - 2$ и $y = 0{,}5x + 1$ одновременно:

1) неотрицательны; 2) неположительны;
3) не меньше 4; 4) не больше 4?

Ответ проиллюстрировать с помощью графиков данных функций, построенных на одной координатной плоскости.

144 Одна сторона треугольника равна 5 м, а другая — 8 м. Какой может быть третья сторона, если периметр треугольника: 1) меньше 22 м; 2) больше 17 м?

145 Если из $\frac{3}{2}$ целого числа вычесть $\frac{1}{4}$ его, то получится число, большее 29, а если из $\frac{3}{2}$ этого же числа вычесть $\frac{1}{3}$ его, то получится число, меньшее 29. Найти это целое число.

146 Если к удвоенному целому числу прибавить его половину, то получится число, меньшее 92, а если из удвоенного этого же целого числа вычесть его половину, то получится число, большее 53. Найти это целое число.

147 В раствор объемом 8 л, содержащий 60% кислоты, начали вливать раствор, содержащий 20% кислоты. Сколько можно влить второго раствора в первый, чтобы смесь содержала кислоты не больше 40%, но не меньше 30%?

148 Для получения крахмала берут рис и ячмень, причем ячменя берут в 4 раза больше, чем риса. Сколько килограммов риса и ячменя нужно взять, чтобы получить больше 63 кг, но не больше 126 кг крахмала, если рис содержит 75% крахмала, а ячмень — 60%?

§ 10 Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль

1. Модуль числа.

Напомним понятие модуля числа.

1) Модуль положительного числа равен самому числу.

Например, $|3| = 3$, $\left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$, $|2{,}4| = 2{,}4$.

2) Модуль отрицательного числа равен противоположному ему числу.

Например, $|-2| = -(-2) = 2$, $\left|-\frac{5}{6}\right| = -\left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{6}$, $|-1{,}5| =$
$= -(-1{,}5) = 1{,}5$.

3) Модуль нуля равен нулю: $|0| = 0$.
Итак, определение модуля числа таково:

$$|a| = a, \text{ если } a \geqslant 0,$$
$$|a| = -a, \text{ если } a < 0.$$

Это определение коротко записывают формулой:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим *геометрический смысл модуля числа*. Изобразим на числовой оси, например, точки 3 и -2 (рис. 20).

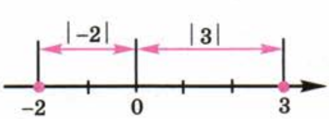


Рис. 20

Из рисунка видно, что $|3| = 3$ есть расстояние от точки 0 до точки 3, $|-2| = 2$ есть расстояние от точки 0 до точки -2.
Итак, геометрически $|a|$ есть расстояние от точки 0 до точки, изображающей число a.

2. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Задача 1 Решить уравнение $|x|=7$.

▶ 1) Пусть $x \geqslant 0$. Тогда по определению модуля $|x|=x$, и уравнение принимает вид:

$$x=7,$$

т. е. $x=7$ — корень исходного уравнения.

2) Пусть $x<0$. Тогда по определению модуля $|x|=-x$, и уравнение принимает вид:

$$-x=7,$$

откуда $x=-7$ — корень исходного уравнения.

Ответ $x_1=7,\ x_2=-7$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $|3x+2|=1$.

▶ 1) Пусть $3x+2 \geqslant 0$. Тогда $3x+2=1, 3x=-1, x=-\frac{1}{3}$.

2) Пусть $3x+2<0$. Тогда $3x+2=-1, 3x=-3, x=-1$.

Ответ $x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=-1$. ◁

3. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Рассмотрим неравенство

$$|x| \leqslant a, \text{ где } a>0.$$

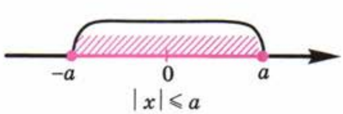


Рис. 21

Этому неравенству удовлетворяют все точки x, находящиеся на расстоянии, не большем a, от точки 0, т. е. точки отрезка $[-a; a]$ (рис. 21). Отрезок $[-a; a]$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $-a \leqslant x \leqslant a$.

Следовательно, неравенство $|x| \leqslant a$, где $a>0$, означает то же самое, что и двойное неравенство $-a \leqslant x \leqslant a$.

Например, неравенство $|x| \leqslant 2{,}5$ означает, что $-2{,}5 \leqslant x \leqslant 2{,}5$; неравенство $|x|<3$ означает, что $-3<x<3$.

Задача 3 Решить неравенство $|5-3x|<8$.

▶ Запишем данное неравенство в виде

$$-8<5-3x<8.$$

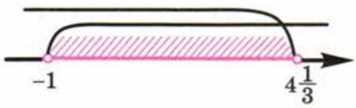


Рис. 22

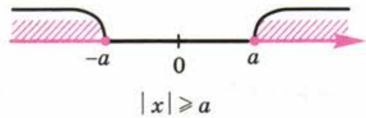


Рис. 23

Это двойное неравенство означает то же самое, что и система неравенств:

$$\begin{cases} 5-3x<8, \\ 5-3x>-8. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $-1<x<4\frac{1}{3}$ (рис. 22).

Ответ $-1<x<4\frac{1}{3}$. ◁

Рассмотрим неравенство

$$|x| \geqslant a, \text{ где } a>0.$$

Этому неравенству удовлетворяют все точки x, находящиеся от точки 0 на расстоянии, не меньшем a, т. е. точки двух лучей $x \geqslant a$ и $x \leqslant -a$ (рис. 23).

Задача 4 Решить неравенство $|x-1| \geqslant 2$.

▶ 1) Пусть $x-1 \geqslant 0$. Тогда $x-1 \geqslant 2$. Получим систему неравенств

$$\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ x-1 \geqslant 2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x \geqslant 3$.

2) Пусть $x-1<0$. Тогда $-(x-1) \geqslant 2$, или $x-1 \leqslant -2$. Получим систему неравенств

$$\begin{cases} x-1<0, \\ x-1 \leqslant -2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x \leqslant -1$.

Итак, во-первых, неравенство $|x-1| \geqslant 2$ выполняется при $x \geqslant 3$, а во-вторых, при $x \leqslant -1$.

Ответ $x \leqslant -1$, $x \geqslant 3$. ◁

Рис. 24

Решения неравенства $|x-1| \geqslant 2$ изображены на рисунке 24.

Отметим, что если в неравенстве $|x| \leqslant a$ число a равно нулю, то неравенство имеет единственное решение $x=0$, а если $a<0$, то это неравенство не имеет решений.

Если в неравенстве $|x| \geqslant a$ число a меньше или равно нулю, то любое число является его решением.

Упражнения

149 (Устно.) Найти модуль числа:

1) 23; 2) 4,7; 3) $\frac{2}{7}$; 4) -47; 5) $-2{,}1$; 6) $-\frac{3}{8}$.

Решить уравнение **(150—153)**.

150 1) $|x|=2{,}5$; 2) $|x|=1{,}5$;
3) $|x-1|=2$; 4) $|x+3|=3$.

151 1) $|x+4|=0$; 2) $|x-2|=0$;
3) $|2x-3|=0$; 4) $|3-4x|=0$.

152 1) $|3x-5|=5$; 2) $|4x+3|=2$;
3) $\left|\frac{2}{3}x+\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{3}$; 4) $\left|\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4}$.

153 1) $|-x|=3{,}4$; 2) $|-x|=2{,}1$; 3) $|5-x|=5$;
4) $|3-x|=8$; 5) $|4-5x|=5$; 6) $|3-4x|=3$.

154 Изобразить на числовой оси множество решений неравенства:
1) $|x|<5$; 2) $|x| \leqslant 4$;
3) $|x| \geqslant 3$; 4) $|x|>2$.

155 Записать неравенство с модулем в виде двойного неравенства:
1) $|x| \leqslant 3$; 2) $|x|<2$.

156 Двойное неравенство записать в виде одного неравенства с модулем:
1) $-3{,}1<x<3{,}1$; 2) $-0{,}3 \leqslant x \leqslant 0{,}3$.

Решить неравенство **(157—160)**.

157 1) $|1+x| \leqslant 0{,}3$; 2) $|2+x|<0{,}2$;
3) $|3-x| \leqslant \frac{2}{3}$; 4) $|1-x|<\frac{3}{4}$.

158 1) $|3x-4|<5$; 2) $|2x+3|<3$;
3) $|2-3x| \leqslant 2$; 4) $|5-4x| \leqslant 1$.

159 1) $|x+1|>1{,}3$; 2) $|x-2| \geqslant 1{,}1$;
3) $|1-x| \geqslant \frac{1}{2}$; 4) $|3-x|>\frac{2}{3}$.

160 1) $|4x-3| \geqslant 3$; 2) $|3x+2| > 1$;
3) $|3x-2| > 4$; 4) $|4-5x| \geqslant 4$.

161 Найти все целые значения x, при которых выполняется неравенство:
1) $|5x-2| < 8$; 2) $|5x+3| < 7$;
3) $|5-3x| \leqslant 1$; 4) $|3-4x| \leqslant 3$.

162 Решить неравенство:
1) $|2x-3| > 5$; 2) $|3x-1| \leqslant 4$;
3) $|1-3x| \leqslant 1$; 4) $|3-2x| \geqslant 3$;
5) $|0{,}3-1{,}3x| < 2{,}3$; 6) $|1{,}2-0{,}8x| \geqslant 2{,}8$.

163 Решить двойное неравенство, записав его в виде системы двух неравенств:
1) $-3 < 2x-9 \leqslant 1$; 2) $3 \leqslant 3x+1 < 5$;
3) $-4 \leqslant 1-0{,}2x \leqslant 1{,}2$; 4) $-3 \leqslant 2+1{,}5x \leqslant -2{,}5$.

164 При каких значениях x выполняется равенство:
1) $|x+3| = x+3$; 2) $|x-2| = 2-x$?

165 Пусть $a < 0$. Выяснить, положительно или отрицательно значение выражения:
1) $a-|a|$; 2) $|-a|-a$;
3) $a^2|a|$; 4) $\dfrac{|a|}{a^3}$.

166 Выяснить, положительно или отрицательно число a, если:
1) $a^3|a| < 0$; 2) $a|a|^2 > 0$;
3) $\dfrac{a^3}{|a|} > 0$; 4) $\dfrac{|a|}{a} < 0$.

167 Доказать, что:
1) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ при любых a и b;

2) $|a^n| = |a|^n$ при любом a и любом натуральном n;

3) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ при любом a и любом $b \neq 0$;

4) $|a^n| = a^n$ при любом a, если n — четное натуральное число;

5) $|a^n| = -a^n$, если $a \leqslant 0$ и n — нечетное натуральное число.

168 Доказать, что число $|a-b|$ равно расстоянию между точками a и b числовой оси.

169 Доказать, что

$$||a|-|b|| \leqslant |a+b| \leqslant |a|+|b|$$

для любых чисел a и b.

Упражнения к главе I

Решить уравнение **(170—171)**.

170 1) $x(2x+5)=0$; 2) $x(3x-4)=0$;
3) $(x-5)(3x+1)=0$; 4) $(x+4)(2x-1)=0$.

171 1) $\frac{2x+3}{3x-1}=0$; 2) $\frac{1-2x}{2x+5}=0$;
3) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}=0$; 4) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}=0$.

172 На числовой оси точка a лежит левее точки b. Положительно или отрицательно число:
1) $b-a$; 2) $2+b-a$; 3) $a-b$; 4) $a-3-b$?

173 Доказать, что:
1) $9x^2+1 \geqslant 6x$ при любом x;
2) $x+\frac{1}{16x} \geqslant \frac{1}{2}$ при $x>0$;
3) $\frac{x}{2}+5 \leqslant -\frac{25}{2x}$ при $x<0$;
4) $\frac{(2x-1)(2x+1)}{x-3} > \frac{1}{3-x}$ при $x>3$.

174 Доказать, что:
1) если $3b-a<a-b$, то $a>2b$;
2) если $2b+a>2a-b$, то $a<3b$;
3) если $\frac{2b}{3}-\frac{a}{6}>\frac{a}{3}+\frac{b}{6}$, то $a<b$;
4) если $1{,}24b-0{,}37a<2{,}63a-1{,}76b$, то $a>b$.

175 Доказать, что:
1) если $x<1{,}2$ и $y<5$, то $x+y<6{,}2$;
2) если $x>\frac{1}{4}$ и $y>2$, то $xy>\frac{1}{2}$.

176 Доказать, что если $x>-3$ и $y>1$, то:
1) $\frac{1}{3}x+\frac{2}{7}y>-\frac{5}{7}$; 2) $\frac{2}{7}x+\frac{1}{3}y>-1$;
3) $2{,}7x+1{,}1y>-7$; 4) $1{,}1x+2{,}7y>-0{,}7$.

177 Пусть $a>b>0$. Доказать, что:
1) $a^3>b^3$; 2) $a^3>ab^2$; 3) $a^4>a^2b^2$; 4) $a^2b^2>b^4$.

178 Решить неравенство:

1) $x + 9 > 8 - 4x$;
2) $3(y + 4) \geqslant 4 - (1 - 3y)$;
3) $5(0{,}2 + y) - 1{,}8 \geqslant 4{,}3 + 5y$;
4) $3(x - 5) + 9 > 15$.

179 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 0{,}5(x + 3) - 0{,}8 < 0{,}4(x + 2) - 0{,}3, \\ 0{,}7(2 - x) + 1{,}3 < 0{,}6(1 - x) + 2{,}2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 1{,}5(x - 2) - 2{,}1 < 1{,}3(x - 1) + 2{,}5, \\ 1{,}3(x + 3) + 1{,}7 > 1{,}6(x + 2) + 1{,}8. \end{cases}$

180 Множество чисел x, изображенное на рисунке 25, записать в виде двойного неравенства и неравенства, содержащего знак модуля.

181 Множество чисел x, изображенное на рисунке 26, записать в виде неравенства, содержащего знак модуля.

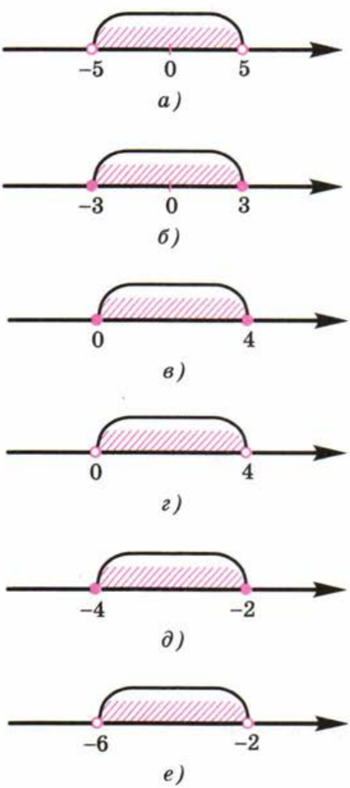


Рис. 25

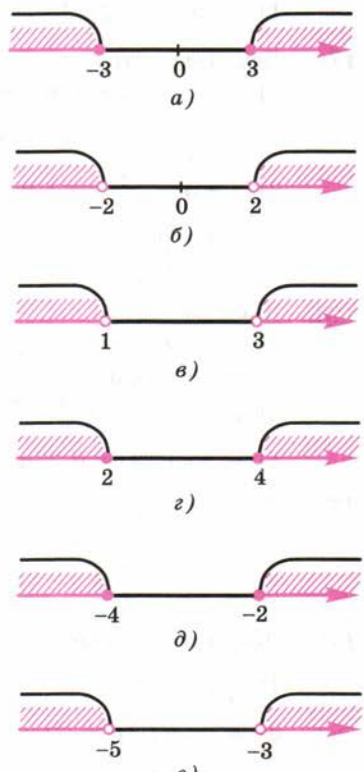


Рис. 26

182 Решить уравнение:

1) $|x-1|=3{,}4$; 2) $|1-x|=2{,}4$;
3) $|1-2x|=5$; 4) $|3x-2|=1$.

183 Решить неравенство:

1) $|x-1|\leqslant 3{,}4$; 2) $|x-1|\geqslant 3{,}4$; 3) $|x-1|<3{,}4$;
4) $|2x+1|\geqslant 3$; 5) $|5x+1|<3$; 6) $|4x-0{,}8|\geqslant 2$.

Проверь себя!

1 Доказать, что при всех значениях x верно неравенство

$$\frac{1}{2}x(2x-4)\geqslant (x-2)x.$$

2 Решить неравенство:

1) $12-5x>0$; 2) $3x-7\leqslant 4(x+2)$; 3) $\frac{x}{2}+\frac{3-x}{4}<2$.

3 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases}3x-13>0,\\25-4x>0;\end{cases}$ 2) $\begin{cases}4x-13\geqslant 3x-10,\\11-4x\leqslant 12-3x;\end{cases}$ 3) $\begin{cases}5x+3<3x-7,\\1-2x>x+4.\end{cases}$

184 Пусть $a<2b$. Доказать, что:

1) $4a-2b<a+4b$; 2) $3a-2b<a+2b$;
3) $a+2b>3a-2b$; 4) $a+b>4a-5b$.

185 Одна сторона треугольника больше 4 см, вторая в 1,5 раза больше первой, третья в 1,5 раза больше второй. Доказать, что периметр треугольника больше 19 см.

186 Указать значения x (если они существуют), при которых значения функций $y=-x+1$ и $y=x+2$ одновременно: 1) положительны; 2) отрицательны; 3) больше 1; 4) больше 2. Ответ проиллюстрировать с помощью графиков данных функций, построенных на одной координатной плоскости.

187 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases}0{,}4(x+3)-1{,}7\geqslant 0{,}3(x-5)+0{,}7x,\\0{,}4(x-1)+0{,}5x\geqslant 0{,}3(x+5)-0{,}9;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\frac{x+4}{7}\leqslant\frac{2x-3}{5},\\\frac{6x-8}{3}\leqslant\frac{3+5x}{4};\end{cases}$ 3) $\begin{cases}\frac{7-x}{2}-3\leqslant\frac{3+4x}{5},\\\frac{5x}{3}+5(4-x)>2(4-x)+13;\end{cases}$

4) $\begin{cases}0{,}4x+\frac{7}{3}<\frac{2}{3}x-1{,}2,\\\frac{2x+9}{7}>\frac{5x-3}{4}.\end{cases}$

188 Сумма четного числа с утроенным последующим четным числом больше 134, а сумма этого же четного числа с удвоенным предыдущим четным числом меньше 104. Найти это число.

189 Сумма нечетного числа с удвоенным последующим нечетным числом меньше 151, а сумма этого же нечетного числа с утроенным предыдущим нечетным числом больше 174. Найти это число.

190 Бригада рабочих за 5 дней изготовила меньше 300 деталей, а за 10 дней — больше 500 деталей. Сколько деталей в день изготовил каждый рабочий, если в бригаде 8 человек и производительность труда рабочих одинакова?

191 За 8 рейсов автобус перевез больше 185 пассажиров, а за 15 рейсов — меньше 370 пассажиров. Сколько мест в автобусе, если в каждом рейсе автобус перевозил ровно столько пассажиров, сколько мест в автобусе?

192 Доказать, что:
1) $2b-a<3a-2b$ тогда и только тогда, когда $a>b$;
2) $a+2b>4a-b$ тогда и только тогда, когда $a<b$;
3) $a-2b>3a+2b$ тогда и только тогда, когда $a+2b<0$;
4) $b-2a<4a+3b$ тогда и только тогда, когда $3a+b>0$.

193 Скорость течения реки равна a километрам в час. С какой постоянной скоростью относительно воды должен двигаться катер, чтобы путь между пристанями он прошел вниз по течению реки по крайней мере в 3 раза быстрее, чем тот же путь вверх по течению реки?

194 В раствор объемом 5 л, содержащий 30% кислоты, начали вливать раствор, содержащий 70% кислоты. Сколько нужно влить второго раствора в первый, чтобы их смесь содержала не менее 60% кислоты?

195 Доказать, что если $|x-a|=|x-b|$, где $a<b$, то x — середина отрезка $[a; b]$, т. е.

$$x=\frac{a+b}{2}.$$

196 Решить уравнение:
1) $|x-1|=|x-2|$; 2) $|x-5|=|x-8|$;
3) $|x+1|=|x-2|$; 4) $|x+3|=|x-5|$;
5) $|x+3|=|x+7|$; 6) $|x+6|=|x+10|$.

II
глава

Приближенные вычисления

§ 11 Приближенные значения величин. Погрешность приближения

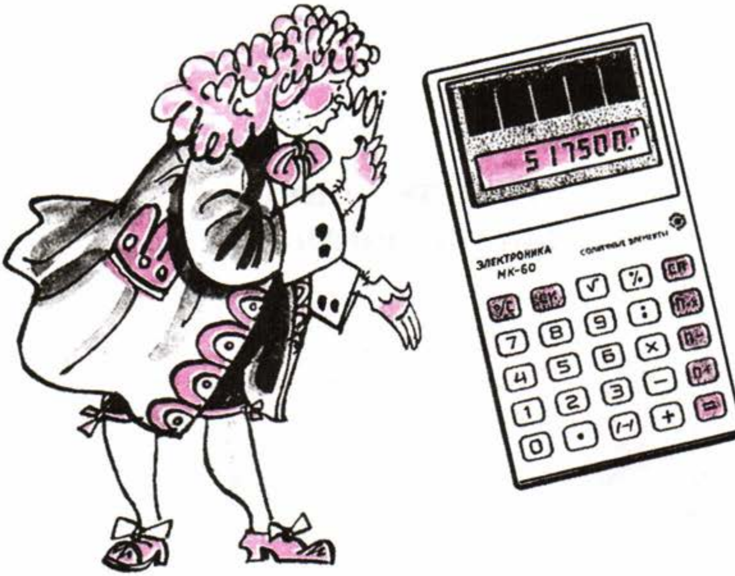
При решении практических задач часто приходится иметь дело с *приближенными значениями различных величин.* Приближенные значения обычно получаются при подсчете большого количества предметов, например числа деревьев в лесу; при измерениях различных величин с помощью приборов, например длины, массы, температуры; при округлении чисел; при вычислениях на микрокалькуляторе и т. д.

Рассмотрим несколько примеров:

1) в классе 36 учеников;
2) в рабочем поселке 10 000 жителей;
3) железнодорожный рельс имеет длину 25 м;
4) рабочий получил в кассе 1205 р.;
5) в самолете Як-42 имеется 120 пассажирских мест;
6) расстояние между Москвой и Санкт-Петербургом 650 км;
7) в килограмме пшеницы содержится 30 000 зерен;
8) расстояние от Земли до Солнца $1{,}5 \cdot 10^8$ км.

В примерах 1, 4, 5 значения величин точные, а в остальных — приближенные.

Задача 1 Один из школьников на вопрос о том, сколько учащихся учится в школе, ответил: «приблизительно 1000», а другой на тот же вопрос ответил: «приблизительно 950». Чей ответ точнее, если в школе учится 986 учащихся?



▶ Первый школьник ошибся на 14, а второй — на 36. Следовательно, более точным был ответ первого учащегося. ◁

Заметим, что разность между точным и приближенным значениями числа учащихся в первом случае отрицательна:

$$986 - 1000 = -14,$$

а во втором случае положительна:

$$986 - 950 = 36.$$

Практически важно знать отклонение приближенного значения от точного в ту или другую сторону, т. е. модуль (абсолютную величину) разности между точным значением и приближенным.

Модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением называется *абсолютной погрешностью приближения*.

Таким образом, если a — приближенное значение величины, точное значение которой равно x, то абсолютная погрешность приближения равна

$$|x - a|.$$

Абсолютную погрешность приближения часто называют просто погрешностью.

Задача 2 При нахождении суммы углов треугольника с помощью транспортира получили результат $182°$. Какова абсолютная погрешность этого приближения?

▶ Точное значение суммы углов треугольника равно $180°$, приближенное значение равно $182°$. Поэтому абсолютная погрешность равна $2°$, так как $|180-182|=|-2|=2$. ◁

Задача 3 Найти погрешность приближения числа $\frac{3}{7}$ десятичной дробью 0,43.

▶ $\left|\frac{3}{7}-0{,}43\right|=\left|\frac{3}{7}-\frac{43}{100}\right|=\left|\frac{300-301}{700}\right|=\left|-\frac{1}{700}\right|=\frac{1}{700}$. ◁

Упражнения

197 Высказать предположение, какие из приведенных в примерах чисел являются точными значениями величин, а какие приближенными:

1) в зрительном зале 660 мест;
2) тетрадь имеет толщину 3 мм;
3) за год автомобильным заводом было выпущено 600 тыс. автомобилей.

198 При измерении ширины обложки книги с помощью линейки получен результат в промежутке от 14,2 до 14,3 см.

1) Можно ли назвать точное значение ширины книги?
2) Указать несколько приближенных значений ширины книги.

199 Найти абсолютную погрешность приближения числа $\frac{4}{9}$ числом:

1) $\frac{6}{13}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0,3; 4) 0,44.

200 Найти погрешность приближения:

1) числа 0,1975 числом 0,198;
2) числа $-3{,}254$ числом $-3{,}25$;
3) числа $-\frac{8}{17}$ числом $-\frac{1}{2}$;
4) числа $\frac{22}{7}$ числом 3,14.

201 Пусть a — приближенное значение числа x. Найти погрешность приближения, если:

1) $x=5{,}346$, $a=5{,}3$; 2) $x=4{,}82$, $a=4{,}9$;
3) $x=15{,}9$, $a=16$; 4) $x=25{,}08$, $a=25$.

202 Известно, что сумма внутренних углов четырехугольника равна 360°. При нахождении суммы внутренних углов четырехугольника с помощью транспортира получили результат 363°. Чему равна погрешность приближения?

203 С помощью графиков прямых $y = 7x + 9$ и $y = 1$ получили, что эти прямые пересекаются в точке с абсциссой, равной -1. Чему равна погрешность этого приближения?

204 Верно ли, что десятичная дробь 0,33 является приближенным значением числа $\frac{1}{3}$ с абсолютной погрешностью, меньшей 0,01?

205 Приближенное значение числа x равно 2,4, абсолютная погрешность меньше 0,1. Найти промежуток, в котором заключено точное значение x.

206 Пусть 7,43 — приближенное значение числа x, а абсолютная погрешность приближения меньше 0,01. В каком промежутке заключено точное значение числа x?

§ 12 Оценка погрешности

Во многих случаях точное значение величины неизвестно, и тогда абсолютную погрешность приближения найти нельзя. Тем не менее часто удается дать *оценку абсолютной погрешности*, если известны приближения с избытком и с недостатком.

Задача 1 В комнатном термометре верхний конец столбика жидкости находится между отметками 21 и 22 °С. В качестве приближенного значения температуры взяли величину 21,5 °С. Оценить абсолютную погрешность приближения указанного измерения.

▶ Точное значение температуры t неизвестно, однако можно утверждать, что $21 \leqslant t \leqslant 22$.

Чтобы получить оценку разности между точным значением температуры и приближенным, т. е. разности $t - 21,5$, вычтем из каждой части этого двойного неравенства число 21,5.

Получим $-0{,}5 \leqslant t - 21{,}5 \leqslant 0{,}5$, т. е. $|t - 21{,}5| \leqslant 0{,}5$. Таким образом, абсолютная погрешность не больше 0,5. ◁

В этом случае говорят также, что температура измерена с точностью до 0,5, и записывают:

$$t = 21{,}5 \pm 0{,}5.$$

Вообще, если a — приближенное значение числа x и $|x - a| \leqslant h$, то говорят, что *число x равно числу a с точностью до h*, и пишут:

$$\boldsymbol{x = a \pm h}. \tag{1}$$

При этом h называют *границей абсолютной погрешности*.

Напомним, что неравенство $|x - a| \leqslant h$ означает то же самое, что и двойное неравенство

$$a - h \leqslant x \leqslant a + h. \tag{2}$$

Например, запись $x = 2{,}43 \pm 0{,}01$ означает, что значение x равно 2,43 с точностью до 0,01, т. е. $2{,}43 - 0{,}01 \leqslant x \leqslant 2{,}43 + 0{,}01$, или $2{,}42 \leqslant x \leqslant 2{,}44$. Числа 2,42 и 2,44 являются приближенными значениями числа x с недостатком и с избытком.

Практически при измерении, рассмотренном в задаче 1, в качестве приближенного значения берут 21 или 22 °C. В этом случае абсолютная погрешность каждого из этих приближений не превосходит 1 °C. Поэтому обычно считают, что измерение температуры с помощью термометра, на котором деления нанесены через 1 °C, проводится с точностью до 1 °C.

Аналогично и для других измерительных приборов *точность измерения* обычно устанавливается по наименьшему делению прибора. Например, микрометром измеряют длину с точностью до 0,01 мм; медицинским термометром измеряют температуру с точностью до 0,1 °C; будильник показывает время с точностью до 1 мин; наручные часы с секундной стрелкой показывают время с точностью до 1 с.

Таким образом, погрешность измерения зависит от того, каким прибором ведется это измерение. Чем меньше погрешность приближения, тем точнее измерительный прибор.

Приближенными значениями часто пользуются при замене обыкновенных дробей десятичными.

Задача 2 Доказать, что число 0,43 является приближенным значением дроби $\frac{13}{30}$ с точностью до 0,01.

▶ Требуется доказать, что $\left|\frac{13}{30}-0{,}43\right| \leqslant 0{,}01$.

Вычислим разность

$$\frac{13}{30}-0{,}43=\frac{13}{30}-\frac{43}{100}=\frac{130-129}{300}=\frac{1}{300}.$$

Следовательно, $\left|\frac{13}{30}-0{,}43\right|=\frac{1}{300}$.

Так как $\frac{1}{300}<0{,}01$, то $\left|\frac{13}{30}-0{,}43\right| \leqslant 0{,}01$. ◁

Упражнения

207 Что означает запись:

1) $x=3{,}9 \pm 0{,}2$; 2) $x=0{,}4 \pm 0{,}15$; 3) $x=\frac{1}{3} \pm \frac{1}{10}$;

2) $x=0{,}73 \pm 0{,}01$; 5) $x=-135 \pm 1$; 6) $x=-2\frac{1}{5} \pm \frac{1}{10}$?

208 Записать в виде двойного неравенства:

1) $x=11 \pm 0{,}5$; 2) $m=142 \pm 1$; 3) $l=3{,}7 \pm 0{,}1$;

4) $v=900 \pm 5$; 5) $x=a \pm h$; 6) $y=m \pm n$.

209 Известно, что:

1) $x=4 \pm 0{,}1$; 2) $x=2{,}7 \pm 0{,}1$;

3) $x=-0{,}6 \pm 0{,}12$; 4) $x=-5{,}9 \pm 0{,}2$.

Найти приближенные значения числа x с недостатком и с избытком.

210 Пусть $x=5{,}8 \pm 0{,}2$. Может ли точное значение оказаться равным:

1) 5,9; 2) 6,001; 3) 6; 4) 5,81?

211 Пусть $x=8{,}7 \pm 0{,}4$. Может ли число x быть равным:

1) 8,222; 2) 8,4; 3) 9; 4) 9,5?

212 Указать приближенное значение числа x, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком:

1) $20 \leqslant x \leqslant 22$; 2) $5 \leqslant x \leqslant 6$; 3) $4{,}5 \leqslant x \leqslant 4{,}8$;

4) $3{,}7 \leqslant x \leqslant 4{,}1$; 5) $2{,}81 \leqslant x \leqslant 2{,}83$; 6) $0{,}55 \leqslant x \leqslant 0{,}6$.

213 Доказать, что:

1) 2,7 есть приближенное значение числа 2,7356 с точностью до 0,5;

2) число 0,27 является приближенным значением дроби $\frac{11}{40}$ с точностью до 0,01.

214 Является ли число 4 приближенным значением дроби 4,3 с точностью до 0,5? до 0,1?

215 Согласно оптическим и радиолокационным измерениям диаметр Меркурия равен (4880 ± 2) км, а радиус Венеры равен (6050 ± 5) км. Записать результат измерения в виде двойного неравенства.

216 Для измерения диаметра цилиндра рабочий пользуется калиброметром, в котором имеются отверстия диаметром 10,00; 10,04; 10,08 мм и т. д. до 10,56 мм. Какова при этом точность измерения?

217 В отделе технического контроля (ОТК) завода измеряется диаметр вала с точностью до 0,1 мм. По таблице допусков диаметр d вала должен быть в промежутке $167{,}8 \leqslant d \leqslant 168{,}2$. Забракует ли ОТК вал, если в результате измерения его диаметр равен 168,1 мм?

218 Высота собора Петропавловской крепости в Санкт-Петербурге 122 м. Экскурсовод сказал туристам, что высота собора приближенно равна 120 м. Какова погрешность такого приближения?

219 При взвешивании тела на вторую чашку весов положили 4 гири, массы которых соответственно равны 100 г, 2 г, 100 мг, 10 мг, после чего весы уравновесились. Чему равна масса тела (в мг)? Оценить точность измерения.

§ 13 Округление чисел

Округление чисел используется при действиях с приближенными значениями различных величин во многих практических задачах математики, физики, техники.

Например, ускорение свободного падения на уровне моря и широте 45° равно 9,80665 м/с^2. Обычно это число округляют до десятых: 9,8. При этом пишут: $g \approx 9{,}8$ (читается «g приближенно равно 9,8»).

Запись $x \approx a$ означает, что число a является приближенным значением числа x.

Задача 1 Площадь земельного участка прямоугольной формы равна 25 м^2, его длина равна 8 м. Найти ширину участка.

▶ Пусть ширина участка равна l метров, тогда

$$l = 25:8 = 3{,}125.$$

Ответ 3,125 м. ◁

Полученную ширину участка на практике округлили бы до десятых, т. е. полагали бы, что $l \approx 3{,}1$. Рассмотрим правило округления чисел на следующем примере. Пусть требуется округлить число 3,647 до сотых. Для округления с недостатком отбросим последнюю цифру 7, в результате получим 3,64.

Для округления с избытком отбросим последнюю цифру 7, а предпоследнюю увеличим на единицу. В результате получим 3,65.

В первом случае абсолютная погрешность округления равна $|3{,}647 - 3{,}64| = 0{,}007$.

Во втором случае абсолютная погрешность равна $|3{,}647 - 3{,}65| = 0{,}003$.

Во втором случае погрешность приближения меньше, чем в первом случае. Следовательно, в рассматриваемом примере наилучшим является округление с избытком.

Чтобы абсолютная погрешность приближения при округлении положительных чисел была наименьшей, пользуются следующим *правилом*:

Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то нужно округлять с недостатком, а если эта цифра больше или равна 5, то нужно округлять с избытком.

Например, при округлении до десятых получаем:

$$3{,}647 \approx 3{,}6, \quad 2{,}658 \approx 2{,}7;$$

при округлении до сотых получаем:

$$0{,}6532 \approx 0{,}65, \quad 9{,}0374 \approx 9{,}04.$$

Задача 2 Заменить число $\frac{2}{7}$ десятичной дробью, равной этому числу с точностью до 0,01.

▶ Запишем результат деления 2 на 7 в виде десятичной дроби с тремя знаками после запятой: $\frac{2}{7} = 0{,}285\ldots$. Округляя это число до сотых, получаем $\frac{2}{7} \approx 0{,}29$. ◁

Для решения этой задачи было найдено значение $\frac{2}{7}$ с тремя знаками после запятой, чтобы получить значение с точностью до 0,01. Если бы потребовалось найти приближенное значение числа $\frac{2}{7}$ с точностью до 0,001, то надо было бы найти четыре десятичных знака.

Упражнения

220 Округлить числа последовательно до тысячных, сотых, десятых долей, единиц, десятков, сотен, тысяч: 3285,05384; 6377,00753; 1234,5336.

221 Округлить числа 15,75 и 317,25 до единиц с недостатком и с избытком. Найти абсолютную погрешность каждого округления.

222 Представить в виде десятичной дроби с точностью до 0,1 число:

1) $\frac{13}{8}$; 2) $\frac{17}{25}$; 3) $\frac{39}{129}$; 4) $\frac{11}{3}$; 5) $\frac{5}{7}$; 6) $\frac{19}{11}$.

223 Представить в виде десятичной дроби с точностью до 0,01 число:

1) $\frac{3}{7}$; 2) $\frac{7}{99}$; 3) $\frac{5}{19}$; 4) $1\frac{2}{3}$; 5) $2\frac{3}{11}$; 6) $5\frac{1}{14}$.

224 Представить в виде десятичной дроби с точностью до 0,001 число:

1) $\frac{2}{7}$; 2) $\frac{5}{13}$; 3) $2\frac{3}{11}$; 4) $7\frac{9}{14}$.

225 1) Средняя скорость движения молекулы водорода при 0 °С равна 1693 м/с. Один ученик округлил это число до 1690 м/с, а другой — до 1700 м/с. Найти абсолютную погрешность каждого округления. В каком случае погрешность приближения меньше?

2) Скорость движения пассажирского поезда равна 81,37 км/ч. Машинист округлил это число до 81 км/ч, а пассажир — до 82 км/ч. Найти абсолютную погрешность каждого приближения. У кого из них погрешность приближения оказалась меньше?

226 Олень движется со скоростью 13,8 м/с. Выразить эту скорость в километрах в час и округлить с точностью до 1 км/ч.

227 Число $\pi \approx 3{,}141592654$ есть отношение длины окружности к ее диаметру. 1) Округлить это число до миллионных, тысячных, сотых. 2) С какой точностью проведено округление, если в записи оставлено 5 цифр после запятой?

§ 14 Относительная погрешность

Для сравнения точности некоторых приближений одной и той же величины используется абсолютная погрешность. Если же сравниваются точности приближения различных величин, то абсолютной погрешности недостаточно.

Например, расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга равно (650 ± 1) км. Длина карандаша равна $(21{,}3 \pm 0{,}1)$ см. Абсолютная погрешность в первом случае не больше 1 км, а во втором — не больше 1 мм. Означает ли это, что длина карандаша измерена точнее, чем расстояние от Москвы до Санкт-Петербурга?

При измерении расстояния от Москвы до Санкт-Петербурга абсолютная погрешность не превышает 1 км на 650 км, что составляет $\frac{1}{650} \cdot 100\% \approx 0{,}15\%$ измеряемой величины.

При измерении длины карандаша абсолютная погрешность не превышает 0,1 см на 21,3 см, что составляет $\frac{0{,}1}{21{,}3} \cdot 100\% \approx 0{,}47\%$ измеряемой величины.

Таким образом, расстояние между городами измерено точнее, чем длина карандаша.

Для оценки качества приближения вводится относительная погрешность.

Относительной погрешностью называют частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближенного значения величины.

Итак, если a — приближенное значение числа x, то абсолютная погрешность равна $|x - a|$, а относительная погрешность равна $\frac{|x-a|}{|a|}$. Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

Задача Приближенное значение массы Земли равно $(5{,}98 \pm 0{,}01) \cdot 10^{24}$ кг. Масса пули охотничьего ружья равна (9 ± 1) г. Какое измерение является более точным?

Оценим относительную погрешность каждого измерения:

1) $\frac{0{,}01 \cdot 10^{24}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} \cdot 100\% \approx 0{,}2\%$; 2) $\frac{1}{9} \cdot 100\% \approx 11\%$.

Ответ Масса Земли измерена точнее. ◁

Упражнения

228 Округлить число до единиц и найти абсолютную и относительную погрешность округления:
1) 3,45; 2) 10,59; 3) 23,263; 4) 0,892.

229 Найти относительную погрешность приближения:
1) числа $\frac{1}{3}$ числом 0,33; 2) числа $\frac{1}{7}$ числом 0,14.

230 Какое измерение точнее:
1) $a = (750 \pm 1)$ м или $b = (1{,}25 \pm 0{,}01)$ м;
2) $p = (10{,}6 \pm 0{,}1)$ с или $q = (1{,}25 \pm 0{,}01)$ с?

231 Одновременно различными приборами измерили температуру пара и получили в первом случае $t = (104 \pm 1)$ °C, во втором $t = (103{,}8 \pm 0{,}1)$ °C, в третьем $t = (103{,}86 \pm 0{,}01)$ °C. Оценить относительную погрешность каждого измерения.

232 Двое учащихся, выполняя практическую работу на измерение длин отрезков, в результате получили (203 ± 1) мм и (120 ± 1) см. Какой из учащихся выполнил работу качественнее?

233 1) Приближенное значение числа x равно a. Относительная погрешность этого приближения равна 0,01, т. е. 1%. Найти абсолютную погрешность, если $a = 2{,}71$.
2) Приближенное значение числа x равно b. Относительная погрешность этого приближения равна 0,001, т. е. 0,1%. Найти абсолютную погрешность, если $b = 0{,}398$.

234 Масса Солнца $(2 \pm 0{,}1) \cdot 10^{33}$ г. Масса детского мяча $(2{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{2}$ г. Какое измерение более точное?

235 Выполняя лабораторную работу по физике, связанную с определением удельной теплоемкости алюминия, ученик получил 922 Дж/кг °C. Какова относительная погрешность приближения, если за точное принять табличное значение удельной теплоемкости, равное 920 Дж/кг °C?

236 Приближенное значение массы Останкинской телевизионной башни $(5{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{7}$ кг. Масса трактора К-700 равна $(1{,}1 \pm 0{,}1) \cdot 10^{4}$ кг. Какое измерение более точное?

§ 15 Практические приемы приближенных вычислений

1. Стандартный вид числа.

В алгебре приняты следующие обозначения:

$$10^0 = 1, \quad 10^{-1} = \frac{1}{10}, \quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100},$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}, \quad \ldots, \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n},$$

где n — натуральное число.

С помощью этих обозначений можно одну и ту же положительную десятичную дробь представить по-разному. Например,

$$0{,}0023 = 0{,}023 \cdot \frac{1}{10} = 0{,}023 \cdot 10^{-1};$$

$$0{,}0023 = 0{,}23 \cdot \frac{1}{100} = 0{,}23 \cdot 10^{-2};$$

$$0{,}0023 = 2{,}3 \cdot \frac{1}{1000} = 2{,}3 \cdot 10^{-3}.$$

Если c — натуральное число или положительная конечная десятичная дробь, то представление этого числа в виде

$$c = a \cdot 10^k, \qquad (1)$$

где $1 \leqslant a < 10$, k — целое число, называют записью числа c в *стандартном виде*. При этом число k называют *порядком* числа c.

Например, порядок числа $324 = 3{,}24 \cdot 10^2$ равен 2; порядок числа $0{,}0073 = 7{,}3 \cdot 10^{-3}$ равен -3; порядок числа $6{,}8 = 6{,}8 \cdot 10^0$ равен 0. При решении многих теоретических и практических задач (особенно при оценке, сравнении результатов вычислений и измерений) важно знать порядок используемых чисел.

2. Верные и сомнительные цифры.

Результаты вычислений и измерений (которые являются приближенными значениями) обычно записывают в виде десятичных дробей.

Цифру какого-либо разряда в записи приближенного значения называют *верной*, если граница абсолютной погрешности не превосходит единицы этого разряда. В противном случае цифру называют *сомнительной*.

Если граница абсолютной погрешности не превосходит половины единицы разряда, следующего за разрядом рассматриваемой цифры, то эту цифру в записи приближенного значения числа называют *строго верной*. Отсюда следует, что если цифра в записи числа является строго верной, то она является и верной.

Например, если $x = 4{,}056 \pm 0{,}0005$, то все цифры в записи приближенного значения 4,056 будут строго верными, так как граница абсолютной погрешности (т. е. число 0,0005) не превосходит половины единицы последнего разряда числа 4,056, т. е. не превосходит 0,001. Так как $0{,}0005 < 0{,}001$, то можно записать, что $x = 4{,}056 \pm 0{,}001$. В этой записи число 0,001 — граница абсолютной погрешности, при этом в приближенном значении 4,056 все цифры верные.

Задача 1 Пусть $x = 5{,}43 \pm 0{,}02$. Найти верные и сомнительные цифры приближенного значения 5,43.

▶ Так как $0{,}02 > 0{,}01$, где 0,01 — единица последнего разряда приближенного значения 5,43, то цифра 3 сомнительная. Но уже $0{,}02 \leqslant 0{,}1$ и $0{,}02 \leqslant 1$, поэтому цифры 4 и 5 верные. ◁

Приближенные значения принято записывать таким образом, чтобы в их записи все цифры были верными. Заметим, что сформулированное в § 13 правило округления чисел дает запись приближенных значений, все цифры которых строго верные. Запись вида $x \approx a$ после применения правил округления говорит о том, что в приближенном значении a числа x все цифры строго верные (а значит и просто верные). Например, запись $x \approx 5{,}6$ означает, что $x = 5{,}6 \pm 0{,}05$; запись $x \approx 5{,}60$ означает, что $x = 5{,}60 \pm 0{,}005$; запись $x \approx 560$ означает, что $x = 560 \pm 0{,}5$. Приближенное равенство $x \approx 560$ (т. е. $x = 560 \pm 1$) можно записать в виде $x \approx 5{,}60 \cdot 10^2$, чтобы подчеркнуть, что последняя цифра 0 в приближенном значении верная. Если же $x = 560 \pm 10$, то верными являются только цифры 5 и 6, а последняя цифра 0 сомнительная. Поэтому в данном случае приближенное значение 560 записывают в стандартном виде так: $x \approx 5{,}6 \cdot 10^2$.

3. Сложение и вычитание приближенных значений.

Теорема. Границы абсолютных погрешностей суммы и разности приближенных значений равны сумме границ абсолютных погрешностей каждого из приближений.

● Пусть

$$x = a \pm h_1, \ y = b \pm h_2, \tag{2}$$

где h_1 и h_2 — границы абсолютных погрешностей чисел a и b соответственно. Записи (2) означают, что справедливы двойные неравенства:

$$-h_1 \leqslant x - a \leqslant h_1, \quad -h_2 \leqslant y - b \leqslant h_2. \tag{3}$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$-(h_1 + h_2) \leqslant (x + y) - (a + b) \leqslant h_1 + h_2,$$

откуда

$$x + y = (a + b) \pm (h_1 + h_2). \tag{4}$$

Запись (4) означает, что $h_1 + h_2$ — граница абсолютной погрешности суммы приближенных значений.

Для оценки разности приближенных значений второе из неравенств (3) умножим на -1 и сложим с первым из неравенств, т. е. сложим неравенства

$$-h_1 \leqslant x - a \leqslant h_1 \quad \text{и} \quad -h_2 \leqslant b - y \leqslant h_2.$$

В результате получим неравенство

$$-(h_1 + h_2) \leqslant (x - y) - (a - b) \leqslant (h_1 + h_2),$$

откуда

$$x - y = (a - b) \pm (h_1 + h_2). \tag{5}$$

Запись (5) означает, что $h_1 + h_2$ является также границей абсолютной погрешности и разности приближенных значений чисел a и b. ○

Задача 2 Пусть все цифры в записях приближенных значений $x \approx 25{,}3$, $y \approx 7{,}4$ строго верные. Найти $x + y$ и $x - y$ с точностью до верных десятичных знаков.

▶ По условию $x = 25{,}3 \pm 0{,}05$, $y = 7{,}4 \pm 0{,}05$. По формулам (4) и (5) сложения и вычитания приближенных значений получаем

$$x + y = 32{,}7 \pm 0{,}1 \quad \text{и} \quad x - y = 17{,}9 \pm 0{,}1.$$

Все цифры в полученных приближенных значениях являются верными, поэтому можно записать так: $x + y \approx 32{,}7$, $x - y \approx 17{,}9$.

Ответ 32,7; 17,9. ◁

Задача 3 Пусть все цифры приближенных значений $x \approx 25{,}3$, $y \approx 7{,}418$ строго верные. Найти $x + y$ и $x - y$ с точностью до верных десятичных знаков.

▶ По условию $x = 25{,}3 \pm 0{,}05$, $y = 7{,}418 \pm 0{,}0005$. По формулам (4) и (5) сложения и вычитания приближенных значений получаем

$$x + y = 32{,}718 \pm 0{,}0505, \quad x - y = 17{,}882 \pm 0{,}0505.$$

В полученных приближенных значениях суммы и разности два последних десятичных знака — сомнительные цифры. После округления с точностью до верных десятичных знаков имеем $x + y \approx 32{,}7$, $x - y \approx 17{,}9$.

Ответ 32,7; 17,9. ◁

Заметим, что в задаче **3** приближенные значения суммы и разности такие же, как и в задаче **2**, хотя приближенное значение y в задаче **3** давалось с большей точностью.

При нахождении суммы и разности приближенных значений пользуются следующим п р а в и л о м 1:

При сложении и вычитании приближенных значений, в записи которых все цифры верные, в сумме и в разности оставляют столько десятичных знаков, сколько их имеет приближенное значение с наименьшим числом десятичных знаков.

Заметим, что во многих случаях полученные таким образом десятичные знаки будут не только верными, но и строго верными.

Задача 4 Найти $x + y$, если $x \approx 2{,}64 \cdot 10^6$, $y = 7{,}37 \cdot 10^5$.

▶ Чтобы результат сложения получить в стандартном виде, выполним следующие преобразования:

$$x + y \approx 2{,}64 \cdot 10^6 + 7{,}37 \cdot 10^5 = 2{,}64 \cdot 10^6 + 7{,}37 \cdot \frac{10^6}{10} =$$

$$= \left(2{,}64 + \frac{7{,}37}{10}\right) \cdot 10^6 = (2{,}64 + 0{,}737) \cdot 10^6 =$$

$$= 3{,}377 \cdot 10^6 = 3{,}38 \cdot 10^6.$$

Ответ $x + y \approx 3{,}38 \cdot 10^6$. ◁

4. Умножение и деление приближенных значений.

При умножении и делении приближенных значений пользуются понятием значащей цифры.

Значащими цифрами называются все верные цифры в десятичной записи приближенного значения, кроме нулей, стоящих перед первой отличной от нуля цифрой.

Например, приближенные значения 0,00321; 120; 0,0760 имеют по три значащих цифры; а в числах 36,23 и 206,30 все цифры значащие.

Если положительные целые числа или конечные десятичные дроби c записаны в стандартном виде, т. е. в виде $c = a \cdot 10^k$, где $1 \leqslant a < 10$, то все цифры числа a будут значащими.

Например, числа $8{,}03 \cdot 10^{-5}$ и $2{,}70 \cdot 10^6$ имеют по три значащие цифры. С помощью понятия относительной погрешности можно обосновать правило 2, которым пользуются в практической работе:

При умножении и делении приближенных значений в произведении и частном оставляют столько цифр (не считая нулей, стоящих перед первой отличной от нуля цифрой), сколько значащих цифр имеет приближенное значение с меньшим числом значащих цифр.

Руководствуясь этим правилом, в результате умножения или деления приближенных значений получают все верные цифры (возможно, за исключением последней).

При выполнении умножения или деления двух приближений разумно округлить приближенное значение с бóльшим числом значащих цифр, оставив в нем на одну значащую цифру больше, чем их имеется в приближенном значении с меньшим числом значащих цифр.

Задача 5 Найти xy, если $x \approx 0{,}69$, $y \approx 2{,}3857$.

▶ Округлив второй множитель до трех значащих цифр, получим $2{,}3857 \approx 2{,}39$. Найдем произведение xy и результат округлим до двух значащих цифр: $xy \approx 0{,}69 \cdot 2{,}39 = 1{,}6491 \approx 1{,}6$.

Ответ $xy \approx 1{,}6$. ◁

Задача 6 Найти $x : y$, если $x \approx 3{,}20 \cdot 10^5$, а $y \approx 6{,}17865 \cdot 10^2$.

▶ Округлив делитель до четырех значащих цифр, получим $6{,}17865 \cdot 10^2 \approx 6{,}179 \cdot 10^2$. Найдем частное $x : y$ и результат округлим до трех значащих цифр:

$$x : y \approx 3{,}20 \cdot 10^5 : (6{,}179 \cdot 10^2) =$$
$$= (3{,}20 : 6{,}179) \cdot (10^5 : 10^2) \approx 0{,}51788 \cdot 10^3 \approx$$
$$\approx 5{,}18 \cdot 10^2.$$

Ответ $x : y \approx 5{,}18 \cdot 10^2$. ◁

Упражнения

237 (Устно) Определить порядок числа, выражающего значение физической константы:

1) масса покоя электрона $m_e = 9{,}1093897 \cdot 10^{-31}$ кг;
2) постоянная Авогадро $N_A = 6{,}0221367 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}$;
3) постоянная Планка $h = 6{,}6260755 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

238 Записать в стандартном виде и определить порядок числа k, выражающего физическую константу:

1) отношение массы протона к массе электрона $\frac{m_p}{m_e} = 1836{,}152701$;
2) постоянная Фарадея $F = 96485{,}309 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$;
3) постоянная Лошмидта $n_0 = 2686763 \cdot 10^{31} \frac{1}{\text{м}^3}$;
4) классический радиус электрона $r_e = 281794092 \cdot 10^{-7}$ м.

239 С помощью записи вида $x = a \pm h$ найти верные и сомнительные цифры приближенного значения a, если:

1) $x = 2{,}85 \pm 0{,}03$; 2) $x = 6{,}07 \pm 0{,}02$;
3) $x = 302{,}48 \pm 0{,}01$; 4) $x = 29{,}35 \pm 0{,}01$;
5) $x = 72{,}6192 \pm 0{,}0005$; 6) $x = 501{,}363 \pm 0{,}0005$;
7) $x = 4{,}3401 \pm 0{,}00005$; 8) $x = 2{,}8213 \pm 0{,}00005$.

240 Условие вида $x \approx a$ (в записи a все цифры верные), записать в виде $x = a \pm h$, если:

1) $x \approx 3{,}8$; 2) $x \approx 2{,}7$; 3) $x \approx 5{,}90$; 4) $x \approx 4{,}3204$;
5) $x \approx 2700$; 6) $x \approx 350$; 7) $x \approx 5{,}3 \cdot 10^2$; 8) $x \approx 2{,}4 \cdot 10^3$.

241 В записи приближенных значений чисел x и y все цифры являются строго верными. Найти $x + y$ и $x - y$ с точностью до верных десятичных знаков, если:

1) $x \approx 2{,}8$, $y \approx 3{,}5$; 2) $x \approx 7{,}9$, $y \approx 3{,}4$;
3) $x \approx 56{,}31$, $y \approx 17{,}29$; 4) $x \approx 39{,}23$, $y \approx 26{,}47$;
5) $x \approx 7{,}25$, $y \approx 2{,}9$; 6) $x \approx 5{,}64$, $y \approx 3{,}8$.

242 С помощью правила 1 найти приближенные значения $x + y$ и $x - y$, если:

1) $x \approx 3{,}3$, $y \approx 2{,}28$; 2) $x \approx 5{,}29$, $y \approx 1{,}6$;
3) $x \approx 5{,}047$, $y \approx 3{,}1$; 4) $x \approx 8{,}8$, $y \approx 6{,}349$.

243 С помощью правила 2 найти приближенные значения $x \cdot y$ и $x : y$, если:

1) $x \approx 2{,}35$, $y \approx 1{,}2$; 2) $x \approx 3{,}48$, $y \approx 1{,}3$;
3) $x \approx 1234$, $y \approx 5{,}1$; 4) $x \approx 2{,}7$, $y \approx 3021$.

244 Найти приближенные значения $x + y$ и $x - y$, если:

1) $x \approx 3{,}2 \cdot 10^3$, $y \approx 2{,}345 \cdot 10^3$;
2) $x \approx 7{,}407 \cdot 10^2$, $y \approx 3{,}4 \cdot 10^2$;
3) $x \approx 2{,}0 \cdot 10^2$, $y \approx 1{,}62 \cdot 10^2$;
4) $x \approx 4{,}10 \cdot 10^3$, $y \approx 1{,}236 \cdot 10^3$;
5) $x \approx 107$, $y \approx 2{,}3$;
6) $x \approx 121$, $y \approx 56{,}3$.

245 Найти приближенные значения $x \cdot y$ и $x : y$, если:

1) $x \approx 0{,}35$, $y \approx 25{,}01$;
2) $x \approx 0{,}021$, $y \approx 32{,}54$;
3) $x \approx 1{,}6 \cdot 10^5$, $y \approx 1{,}402 \cdot 10^5$;
4) $x \approx 2{,}1 \cdot 10^4$, $y \approx 1{,}325 \cdot 10^4$;
5) $x \approx 2{,}30 \cdot 10^{-2}$, $y \approx 1{,}123 \cdot 10^{-2}$;
6) $x \approx 1{,}820 \cdot 10^{-1}$, $y \approx 1{,}0362 \cdot 10^{-1}$.

§ 16 Простейшие вычисления на микрокалькуляторе

Микрокалькулятор (сокращенно МК) — это простейшая электронно-вычислительная машина (ЭВМ) небольших размеров, предназначенная для выполнения различных математических операций: арифметических действий над числами, нахождения степеней чисел, вычисления значений различных функций и т. д. Микрокалькуляторами часто пользуются инженеры, техники, экономисты, бухгалтеры и другие специалисты в своей повседневной работе.

На рисунке 27 изображена передняя панель микрокалькулятора «Электроника МК-51». В ее верхней части расположен индикатор (табло), в нижней — клавиатура, в левом верхнем углу клавиатуры — переключатель питания. На табло имеется разрядная сетка из девяти позиций для изображения чисел. Похожие панели имеют многие инженерные микрокалькуляторы.

При включении МК-51 высвечиваются: на табло число 0, слева в верхней части табло точка — символ годности элемента питания, в середине — буква «Г», показывающая, что в этом режиме работы микрокалькулятора вычисления с величинами углов выполняются в градусной мере.

Далее будут продемонстрированы приемы вычислений с помощью МК-51. Работа на МК других моделей происходит аналогично. Однако, используя другую модель МК, необходимо познакомиться с инструкцией по работе с этой моделью (последовательности нажатия клавиши для достижения одного и того же результата у разных моделей МК могут быть различными).

Рис. 27

1. Ввод чисел.

Задача 1 Ввести число 73,1932.

▶ Последовательно нажимаем клавиши

$\boxed{7}$, $\boxed{3}$, $\boxed{\cdot}$, $\boxed{1}$, $\boxed{9}$, $\boxed{3}$, $\boxed{2}$.

На табло появляется число 73.1932 — на клавиатуре и табло МК-51 десятичная запятая изображается точкой. ◁

Для введения отрицательного числа применяется клавиша изменения знака числа $\boxed{/-/}$. Эта клавиша нажимается после введения всех цифр числа.

Задача 2 Ввести число −0,02301.

▶ Введем число 0,02301 и затем нажмем клавишу $\boxed{/-/}$. На табло высветится число −0,02301. Повторное нажатие клавиши $\boxed{/-/}$ изменит знак числа на противоположный, т. е. снова получится число 0,02301. ◁

2. Выполнение арифметических действий.

Чтобы выполнить арифметическую операцию над числами a и b, нужно:
1) ввести число a;
2) нажать клавишу требуемой операции;
3) ввести число b;
4) нажать клавишу $\boxed{=}$.

После этого на табло высветится результат.

Например, умножение производится по программе

$$a \boxed{\times} b \boxed{=}.$$

При $a = 4{,}32$, $b = 9{,}5$ получаем следующую программу вычислений:

$$\boxed{4}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{3}\ \boxed{2}\ \boxed{\times}\ \boxed{9}\ \boxed{\cdot}\ \boxed{5}\ \boxed{=}.$$

Ответ 41,04.

Решение подобных примеров кратко будем записывать так:

$$4{,}32 \boxed{\times} 9{,}5 \boxed{=} \underline{41{,}04}.$$

В такой краткой записи не приводится программа ввода данных чисел, а появившийся на табло результат вычислений записывается справа и подчеркивается.

Задача 3 Найти сумму $25{,}147 + 3{,}22$.

► $25{,}147 \boxed{+} 3{,}22 \boxed{=} \underline{28{,}367}$. ◁

Задача 4 Найти разность $198{,}023 - 74{,}986$.

► $198{,}023 \boxed{-} 74{,}986 \boxed{=} \underline{123{,}037}$. ◁

Задача 5 Вычислить $-25637 - 49801$.

► $25637 \boxed{/-/} \boxed{-} 49801 \boxed{=} \underline{-75438}$. ◁

Задача 6 Найти произведение $37{,}56 \cdot 47$.

▶ 37,56 $\boxed{\times}$ 47 $\boxed{=}$ <u>1765,32</u>. ◁

Задача 7 Найти частное $4319{,}4 : 93{,}9$.

▶ 4319,4 $\boxed{\div}$ 93,9 $\boxed{=}$ <u>46</u>. ◁

Задача 8 Найти произведение $25{,}4395 \cdot 4{,}353$.

▶ 25,4395 $\boxed{\times}$ 4,353 $\boxed{=}$ <u>110,73814</u>. ◁

Появившийся на табло результат вычислений является приближенным значением произведения. Точный ответ 110,7381435 содержит 10 цифр, а на табло большинства микрокалькуляторов помещается не более восьми цифр. В этом случае микрокалькулятор автоматически осуществляет округление до восьми цифр.

При решении практических задач, как правило, достаточно получить 3—4 первые значащие цифры. Поэтому результат вычислений обычно округляют с требуемой точностью.

Задача 9 Найти частное $25 : 13$ с точностью до 0,01.

▶ 25 $\boxed{\div}$ 13 $\boxed{=}$ <u>1,9230769</u>. Округляя до 0,01, получаем 1,92. ◁

Задача 10 Найти произведение ab, если $a \approx 35{,}28$, $b = 7{,}31$.

▶ С помощью МК находим $35{,}28 \cdot 7{,}31 = 257{,}8968$. Согласно правилу 2 (см. § 15) результат округляем до трех значащих цифр, получим $ab \approx 258$.

Ответ $ab \approx 258$. ◁

Если на МК попытаться выполнить невозможную операцию, например деление на нуль, то на табло высветится буква «E» (первая буква английского слова *error* — ошибка) либо *error*.

Упражнения

Ввести в микрокалькулятор число **(246—248)**.

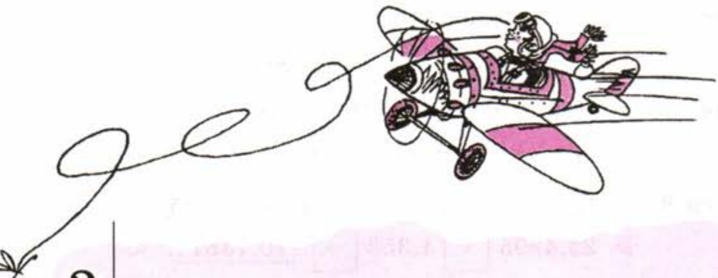
246 1) 326; 2) 108; 3) 5601; 4) 7060.

247 1) 32,4; 2) 8,45; 3) 0,104; 4) 0,2903.

248 1) −834; 2) −725; 3) −1,032; 4) −5,409.

249 Найти сумму:

1) $32{,}405 + 1{,}024$; 2) $3{,}104 + 21{,}98$;
3) $3{,}74809 + 2{,}34705$; 4) $981{,}504 + 3021{,}457$.

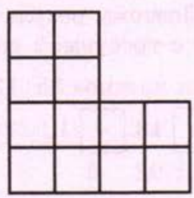


№ 3

1. ДАННУЮ ФИГУРУ РАЗРЕЗАТЬ НА ДВЕ РАВНЫЕ ЧАСТИ.

2. ДАННУЮ ФИГУРУ РАЗРЕЗАТЬ НА ТРИ РАВНЫЕ ЧАСТИ.

3. ДАННУЮ ФИГУРУ РАЗРЕЗАТЬ НА ЧЕТЫРЕ РАВНЫЕ ЧАСТИ.



250 Найти разность:

1) $73{,}54 - 21{,}012$; 2) $81{,}032 - 59{,}807$;
3) $421{,}53 - 627{,}3$; 4) $2{,}5894 - 13{,}1037$.

251 Вычислить:

1) $-9843 - 7025$; 2) $-10\,134 - 543\,210$;
3) $-35{,}287 - 563{,}14$; 4) $-6845{,}1 - 320{,}02$.

252 Найти произведение:

1) $341{,}7 \cdot 13{,}4$; 2) $74{,}53 \cdot 14{,}2$;
3) $3{,}795 \cdot 78{,}6$; 4) $86{,}5 \cdot 6{,}302$.

253 Найти частное:

1) $8748 : 27$; 2) $22\,506 : 31$;
3) $13{,}3974 : 8{,}27$; 4) $31{,}284 : 6{,}32$.

254 Найти произведение с точностью до 0,01:

1) $4{,}31 \cdot 28{,}37$; 2) $56{,}78 \cdot 2{,}3404$;
3) $507{,}63 \cdot 4{,}2102$; 4) $2{,}3171 \cdot 508{,}13$.

255 Найти частное с точностью до 0,001:
1) 341 : 23,5; 2) 724 : 51,7; 3) 6,135 : 2,3; 4) 14,38 : 5,5.

256 Плотность ртути 13,6 г/см^3. Какова масса ртути, заполнившей сосуд объемом 11,3 см^3?

257 Найти объем сосуда, заполненного углекислым газом массой 9,35 кг, если плотность углекислого газа равна 1,98 кг/м^3.

258 Размеры заготовки прямоугольного сечения равны 35,15 мм и 40,23 мм. Найти площадь сечения заготовки. Округлить результат до 0,01 мм^2.

259 Упростить выражение и найти его числовое значение с точностью до 0,01:
1) $n-(1+n^2):(n-1)$ при $n=-0{,}37$;
2) $\left(\frac{n}{3}-\frac{n}{3+n}\right)\cdot\frac{3}{n}$ при $n=-1{,}647$.

260 Найти с точностью до 0,1 значения функции $y=7{,}3x$ при $x=-2{,}1$; 0,8; 1,7; 2,5.

§ 17 Действия с числами, записанными в стандартном виде

Многие инженерные МК позволяют оперировать с числами, записанными в десятичной форме, если эти числа и результаты операций не превышают 99999999. Для того чтобы можно было выполнять действия с большими числами, используют запись чисел в стандартном виде.

В инструкциях по эксплуатации микрокалькуляторов при записи числа в стандартном виде $a \cdot 10^n$ (где $1 \leqslant a < 10$) число a называют *мантиссой*, а n — *порядком* числа.

Например:
1) $275=2{,}75\cdot10^2$; здесь 2,75 — мантисса числа 275, а 2 — его порядок;
2) $-2753=-2{,}753\cdot10^3$; здесь $-2{,}753$ — мантисса числа -2753, а 3 — его порядок.

3) $0{,}27 = 2{,}7 \cdot \frac{1}{10} = 2{,}7 \cdot 10^{-1}$; здесь $2{,}7$ — мантисса числа $0{,}27$; -1 — его порядок;

4) $-0{,}0275 = -2{,}75 \cdot \frac{1}{100} = -2{,}75 \cdot 10^{-2}$; здесь $-2{,}75$ — мантисса числа $-0{,}0275$; -2 — его порядок;

5) $3{,}81 \cdot 10^{-3} = 3{,}81 \cdot \frac{1}{1000} = 0{,}00381$.

Покажем на примерах, как на табло МК-51 изображается стандартный вид числа.

1) Число $-8{,}31 \cdot 10^{-7}$ изображается так:

		–	8.	3	1	–	0	7

мантисса числа — порядок числа

2) Число $5{,}3894 \cdot 10^{21}$ изображается так:

	5.	3	8	9	4		2	1

мантисса числа — порядок числа

Обратите внимание: при изображении на табло числа в стандартном виде третья справа ячейка предназначена для знака порядка числа, причем знак «+», как и в обычной записи показателя степени, не пишется (пример 2).

Стандартный вид числа на табло распознается следующим образом: если третья справа ячейка либо пустая, либо в ней записан знак «–», а слева от этой ячейки записано некоторое число a, такое, что $1 \leqslant a < 10$, то на табло изображено число в стандартном виде.

Посмотрите, как с помощью клавиши $\boxed{\text{ВП}}$ (ввод порядка) вводятся в МК числа, записанные в стандартном виде.

Задача 1 Ввести число $4{,}935 \cdot 10^{23}$.

▶ Программа ввода такова:

$$4{,}935\ \boxed{\text{ВП}}\ 23.$$

На табло получается

		4.	9	3	5		2	3

◁

Задача 2 Ввести число $-2{,}59 \cdot 10^{-3}$

▶ Программа ввода такова:

$$2{,}59 \ \boxed{/-/} \ \boxed{\text{ВП}} \ 3 \ \boxed{/-/}$$

На табло получается

		−	2.	5	9	−	0	3

◁

Таким образом, для введения в МК числа, записанного в стандартном виде, нужно:
1) ввести мантиссу числа;
2) нажать клавишу ввода порядка числа $\boxed{\text{ВП}}$;
3) ввести порядок числа.

При этом для изображенного числа на табло МК-51 первые слева шесть ячеек отводятся для мантиссы числа, а последние три — для его порядка. Поэтому число, записанное в стандартном виде, можно ввести в МК только тогда, когда его мантисса содержит не более шести цифр, если она положительна, и не более пяти цифр, если она отрицательна; его порядок содержит не более двух цифр.
Таким образом, МК может выполнять вычисления с числами от $-9{,}9999 \cdot 10^{99}$ до $9{,}99999 \cdot 10^{99}$. При этом действия над числами, записанными в стандартном виде, выполняются так же, как и над числами, записанными в обычном виде.

Задача 3 Найти произведение $3{,}56 \cdot 10^{14} \cdot 5{,}8 \cdot 10^{7}$.

▶ $3{,}56 \ \boxed{\text{ВП}} \ 14 \ \boxed{\times} \ 5{,}8 \ \boxed{\text{ВП}} \ 7 \ \boxed{=} \ \underline{2{,}0648 \cdot 10^{22}}$. ◁

Задача 4 Найти произведение $0{,}024 \cdot 0{,}032$.

▶ $0{,}024 \ \boxed{\times} \ 0{,}032 \ \boxed{=} \ \underline{7{,}68 \cdot 10^{-4}}$. ◁

Всегда, как и в этой задаче, если в промежуточном или окончательном результате вычислений получается число, модуль которого меньше 0,01, то это число появляется на табло МК в стандартном виде.

Задача 5 Найти частное $(7{,}83 \cdot 10^{9}):(3{,}4 \cdot 10^{12})$.

▶ $7{,}83 \ \boxed{\text{ВП}} \ 9 \ \boxed{\div} \ 3{,}4 \ \boxed{\text{ВП}} \ 12 \ \boxed{=} \ \underline{2{,}30294 \cdot 10^{-3}} \approx$
$\approx 2{,}3 \cdot 10^{-3}$. ◁

При решении этой задачи МК автоматически округлил мантиссу результата, сохранив ее первые шесть цифр. Затем было произведено округление результата до двух значащих цифр.

Задача 6 Найти сумму $89000 + 7{,}35 \cdot 10^8$.

▶ 89000 $\boxed{+}$ 7,35 $\boxed{\text{ВП}}$ 8 $\boxed{=}$ $\underline{7{,}35089 \cdot 10^8}$. ◁

Задача 7 Найти разность $1{,}2 \cdot 10^8 - 98300000$.

▶ 1,2 $\boxed{\text{ВП}}$ 8 $\boxed{-}$ 98300000 $\boxed{=}$ $\underline{21700000}$. ◁

Задача 8 Найти частное $(3{,}4 \cdot 10^9):(1{,}7 \cdot 10^8)$.

▶ 3,4 $\boxed{\text{ВП}}$ 9 $\boxed{\div}$ 1,7 $\boxed{\text{ВП}}$ 8 $\boxed{=}$ $\underline{20}$. ◁

Рассмотренные примеры показывают, что при выполнении вычислений на МК-51 одни из данных чисел можно вводить в обычном виде, а другие — в стандартном. Результат вычислений может быть как точным, так и приближенным, и появляться на табло как в обычном, так и в стандартном виде.

Упражнения

261 Записать в стандартном виде число, выражающее:

1) массу атома кислорода

$$0{,}\underbrace{0000000000000000000000}_{22\text{ нуля}}2662 \text{ г};$$

2) толщину пленки мыльного пузыря 0,00000006 см;

3) единицу длины ангстрем (применяется в молекулярной физике) 0,0000001 см;

4) диаметр молекулы воды 0,00000003 см.

Записать число в стандартном виде, назвать его знак, мантиссу, знак порядка и порядок **(262—263)**.

262 1) 35,801; 2) 430,24; 3) 5,2004; 4) 3602,1; 5) 0,48352; 6) 0,068345; 7) 2 843 154; 8) 12 345 678.

263 1) −0,35; 2) −0,453; 3) −23,4578; 4) −450,102; 5) −87 654 321; 6) −3,54001; 7) −6814,1234; 8) −12 345,678.

264 Ввести в МК число:

1) $3{,}58 \cdot 10^8$; 2) $7{,}01 \cdot 10^9$;
3) $-5{,}874 \cdot 10^{-11}$; 4) $-6{,}854 \cdot 10^{-23}$.

265 Вычислить (результат записать в обычном виде):

1) $1{,}6524 : 3{,}24$; 2) $151{,}34 : 658$;
3) $11{,}3336 : 248$; 4) $0{,}8211 : 357$.

266 Найти частное с точностью до 0,001:

1) $39 : 286$; 2) $87 : 124$; 3) $1{,}7 : 58{,}3$; 4) $1{,}9 : 38{,}7$.

Вычислить на МК **(267—270)**.

267 1) $98\,765\,432 + 12\,345\,678$; 2) $-87\,654\,321 - 56\,789\,012$;
3) $6{,}324 \cdot 10^{-3} + 8{,}123 \cdot 10^{-2}$; 4) $5{,}729 \cdot 10^{-4} - 3{,}456 \cdot 10^{-3}$.

268 1) $-98{,}765 + 5{,}43 \cdot 10^{5}$; 2) $3{,}456 \cdot 10^{4} + 5678$;
3) $85\,006\,401 + 3{,}84 \cdot 10^{8}$; 4) $98\,764\,530 + 4{,}56 \cdot 10^{8}$.

269 1) $12\,340\,000 \cdot 87\,600\,000$; 2) $90\,080\,000 \cdot 20\,300\,000$;
3) $1{,}58 \cdot 10^{-3} \cdot 65$; 4) $843 \cdot 3{,}47 \cdot 10^{-2}$.

270 1) $(6{,}58 \cdot 10^{24}) : (3{,}29 \cdot 10^{3})$; 2) $(7{,}41 \cdot 10^{31}) : (2{,}47 \cdot 10^{15})$;
3) $(4{,}57 \cdot 10^{51}) : (3{,}12 \cdot 10^{49})$; 4) $(8{,}31 \cdot 10^{63}) : (4{,}2 \cdot 10^{61})$.

271 Найти с точностью до 0,0001 г массу газа плотности ρ, занимающую объем V, если:

1) $\rho = 1{,}98 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, $V = 0{,}725$ см^3 (углекислый газ);
2) $\rho = 1{,}29 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, $V = 1125$ см^3 (воздух при 0 °C);
3) $\rho = 1{,}43 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, $V = 355$ см^3 (кислород);
4) $\rho = 9 \cdot 10^{-5}$ г/см^3, $V = 789$ см^3 (водород).

272 Упростить выражение и найти его числовое значение с точностью до 0,1:

1) $\left(\frac{1}{(a+3)^2} : \frac{a}{a^2-9} - \frac{a-9}{a^2-9}\right)(a-3)$ при $a = 6{,}47 \cdot 10^{-3}$;

2) $(a+2)\left(\frac{a+6}{a^2-4} - \frac{1}{a^2-4} \cdot \frac{(a+2)^2}{a}\right)$ при $a = -2{,}89 \cdot 10^{-2}$.

§ 18 Вычисления на микрокалькуляторе степени и числа, обратного данному

Для вычисления степени y^x на МК нужно ввести число y, нажать клавишу $\boxed{y^x}$, ввести число x и нажать клавишу $\boxed{=}$.

Задача 1 Вычислить: 1) $(2{,}57)^3$; 2) $(386)^{15}$; 3) $(2{,}5\cdot 10^4)^8$.

▶ 1) 2,57 $\boxed{y^x}$ 3 = $\underline{16{,}974593}$;

2) 386 $\boxed{y^x}$ 15 = $\underline{6{,}2923\cdot 10^{38}}$;

3) 2,5 $\boxed{\text{ВП}}$ 4 $\boxed{y^x}$ 8 = $\underline{1{,}52587\cdot 10^{35}}$. ◁

В 9-м классе вы узнаете, что выражение y^x имеет смысл для любых значений x только при $y>0$. Поэтому МК не может вычислить значение y^x, если $y<0$. Например, если на МК-51 набрать программу для вычисления степени $(-2)^4$, то на табло появится сигнал ошибки — буква «Е».

$$2\ \boxed{/-/}\ \boxed{y^x}\ 4 = \text{E}.$$

Теперь посмотрите, как с помощью клавиши $\boxed{1/x}$ на МК вычисляется число, обратное данному.

Задача 2 Вычислить: 1) $\frac{1}{50}$; 2) $\frac{1}{625}$; 3) $\frac{1}{27}$ с точностью до 0,001; 4) $-\frac{1}{0{,}13}$ с точностью до 0,1.

▶ 1) 50 $\boxed{1/x}$ $\underline{0{,}02}$;

2) 625 $\boxed{1/x}$ $\underline{1{,}6\cdot 10^{-3}}$;

3) 27 $\boxed{1/x}$ $\underline{0{,}037037}\approx 0{,}037$;

4) 0,13 $\boxed{/-/}$ $\boxed{1/x}$ $\underline{-7{,}6923076}\approx -7{,}7$. ◁

Так как после нажатия клавиши $\boxed{1/x}$ на табло сразу появляется число, обратное данному (без нажатия клавиши $\boxed{=}$), то с этим числом можно выполнить и другие операции.

Задача 3 Вычислить: 1) $\frac{1}{14}+0{,}58$; 2) $0{,}21-\frac{1}{1{,}5}$; 3) $\frac{1}{17}+\frac{1}{21}$; 4) $\frac{1}{(0{,}34)^2}$.

▶ 1) 14 $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 0,58 $\boxed{=}$ $\underline{0{,}6514285}$;

2) 0,21 $\boxed{-}$ 1,5 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underline{-0{,}4566666}$;

3) 17 $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 21 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underline{0{,}1064425}$;

4) 0,34 $\boxed{1/x}$ $\boxed{y^x}$ 2 $\boxed{=}$ $\underline{8{,}650519}$. ◁

Вычисление значений выражения x^2 можно выполнять с помощью клавиш $\boxed{F}$ и $\boxed{x^2}$ (в некоторых моделях МК не требуется перед клавишей $\boxed{x^2}$ нажимать клавишу перехода режима $\boxed{F}$).

Задача 4 Вычислить: 1) $(3{,}78)^2$; 2) $(1{,}58)^2+\frac{1}{0{,}57}$.

▶ 1) 3,78 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\underline{14{,}2884}$;

2) 1,58 $\boxed{F}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 0,57 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underline{4{,}2507859}$. ◁

Упражнения

Записать показания табло МК после выполнения действий **(273—276)**.

273 1) $(17{,}2)^2$; 2) $(23{,}4)^2$; 3) 453^2; 4) 159^2; 5) $(0{,}78)^2$; 6) $(0{,}0141)^2$.

274 1) $\frac{1}{17}$; 2) $\frac{1}{21}$; 3) $-\frac{1}{23}$; 4) $-\frac{1}{14}$; 5) $-\frac{1}{3{,}78}$; 6) $-\frac{1}{8{,}12}$; 7) $\frac{1}{0{,}013}$; 8) $\frac{1}{0{,}081}$.

275 1) 12^3; 2) 21^3; 3) $(1{,}48)^5$; 4) $(3{,}71)^5$; 5) $(0{,}027)^4$; 6) $(0{,}082)^6$; 7) $\frac{1}{(0{,}15)^2}$; 8) $\frac{1}{(0{,}42)^2}$.

276 1) $\frac{1}{36}+0{,}281$; 2) $0{,}37-\frac{1}{16}$; 3) $\frac{1}{71}+\frac{1}{63}$; 4) $\frac{1}{0{,}17}\cdot\frac{1}{0{,}23}$; 5) $\frac{1}{3{,}4}:\frac{1}{6{,}3}$; 6) $\frac{1}{0{,}28}-\frac{1}{0{,}43}$.

277 Найти площадь квадратного участка земли, если длина его стороны равна 1915 м.

278 Вычислить:
1) $(3{,}2\cdot 10^7)^3$; 2) $(9{,}23\cdot 10^{-7})^3$.

279 Упростить выражение и найти его числовое значение с точностью до 0,01:

1) $\frac{9a^2-16}{(3a+4)(a-3)^2}\cdot\frac{a^2-6a+9}{3a^3-4a^2}$ при $a=0{,}0478$;

2) $\frac{4b^2-2b+1}{(2b+1)b^3}:\frac{8b^3+1}{4b^3+4b^2+b}$ при $b=0{,}1385$.

280 Дана функция $y=x^3$. Найти с точностью до 0,01 значения функции при $x=-1{,}11$; $-3{,}111$; $1{,}21$; $2{,}31$.

§ 19 Последовательное выполнение операций на микрокалькуляторе

Задача 1 Вычислить высоту, на которую поднимается камень, брошенный вертикально вверх со скоростью v, используя формулу $h = \frac{v^2}{2g}$, где $v \approx 25$ м/с, $g \approx 9{,}8$ м/с^2.

► Вычисления можно провести по программе

25 $\boxed{\times}$ 25 $\boxed{\div}$ 2 $\boxed{\div}$ 9,8 $\boxed{=}$ <u>31,887755</u>.

Ответ $h \approx 32$ м. ◁

Отметим, что при нажатии очередной клавиши операции на табло высвечивается результат всех предыдущих вычислений.

Задача 2 Определить сопротивление участка электрической цепи, состоящей из двух последовательно соединенных сопротивлений, если величина первого из них $R_1 \approx 5{,}15$ Ом, а на втором падение напряжения $U \approx 12{,}5$ В происходит при силе тока $I \approx 2{,}1$ А.

► Сопротивление R на данном участке цепи можно найти по формуле

$$R = \frac{U}{I} + R_1.$$

Получаем 12,5 $\boxed{\div}$ 2,1 $\boxed{+}$ 5,15 $\boxed{=}$ <u>11,102381</u>.

Ответ $R \approx 11$ Ом. ◁

Задача 3 Вычислить значение выражения $\frac{8{,}375 \cdot 26{,}3}{507} - 0{,}15$ с точностью до 0,01.

► 8,375 $\boxed{\times}$ 26,3 $\boxed{\div}$ 507 $\boxed{-}$ 0,15 $\boxed{=}$ <u>0,2844428</u>.

Ответ 0,28. ◁

Задача 4 Вычислить $163^2 + 122^2 - 179^2$.

► 163 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 122 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 179 $\boxed{\text{F}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ <u>9412</u>.

Ответ 9412. ◁

Задача 5 Вычислить $\frac{1}{152} - \frac{1}{354} + \frac{1}{23}$ с точностью до 0,0001.

▶ 152 $\boxed{1/x}$ $\boxed{-}$ 354 $\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ 23 $\boxed{1/x}$ $\boxed{=}$ $\underline{0{,}0472323}$.

Ответ 0,0472. ◁

Задача 6 Вычислить $\left(\frac{1}{0{,}24}\right)^2 + (4{,}56)^2 - (5{,}28)^2$ с точностью до 0,01.

▶ 0,24 $\boxed{1/x}$ $\boxed{\mathrm{F}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{+}$ 4,56 $\boxed{\mathrm{F}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{-}$ 5,28 $\boxed{\mathrm{F}}$ $\boxed{x^2}$ $\boxed{=}$ $\underline{10{,}276311}$.

Ответ 10,28. ◁

Упражнения

Записать показания табло МК после выполнения действий **(281—282)**.

281 1) $484 \cdot 5{,}87 + 6032$; 2) $353 : 4{,}1 + 120$;

3) $\frac{17{,}345 \cdot 29{,}95}{425} - 4{,}348$; 4) $\frac{1{,}398 \cdot 9{,}348}{14{,}25} - 10{,}542$.

282 1) $(2{,}348 - 1{,}453) \cdot 2{,}379$; 2) $(16{,}87 + 35{,}67) : 254$;

3) $\left(\frac{643}{34} - 23\right) \cdot 44$; 4) $\left(\frac{728}{54} + 46\right) : 247$.

283 Найти периметр и площадь прямоугольника со сторонами a и b, если $a \approx 4{,}8$ см, $b \approx 14{,}5$ см.

284 Какой должна быть ширина прямоугольного участка земли, чтобы при длине 164 м он имел площадь $8{,}6 \cdot 10^2$ м^2?

285 Вычислить:

1) $256^2 + 321^2$; 2) $524^2 - 499^2$;

3) $234^2 - 483^2 + 197^2$; 4) $186^2 + 271^2 - 328^2$.

286 Вычислить с точностью до 0,001:

1) $\frac{1}{2{,}1} - \frac{1}{8{,}3} - \frac{1}{7{,}1}$; 2) $\frac{1}{3{,}4} - \frac{1}{6{,}8} + \frac{1}{1{,}2}$.

287 Вычислить с точностью до 0,01:

1) $\frac{1}{(0{,}34)^2}$; 2) $\left(\frac{1}{0{,}57}\right)^2$;

3) $\left(\frac{1}{0{,}26}\right)^2 + \frac{1}{(0{,}43)^2}$; 4) $\frac{1}{(0{,}17)^2} - \left(\frac{1}{0{,}23}\right)^2$;

5) $\left(\frac{1}{0{,}28}\right)^2 - (3{,}21)^2$; 6) $(1{,}47)^2 + \frac{1}{(3{,}4)^2}$.

288 Вычислить с точностью до 0,1:

1) $(5,1)^3+(4,3)^2$; 2) $(3,7)^3-(2,3)^2$;

3) $(3,2)^5-(1,3)^2+\frac{1}{0,15}$; 4) $(7,8)^4+(3,8)^2-\frac{1}{0,24}$.

289 Электрическая плитка работала $t=5$ ч при напряжении $U\approx 127$ В и силе тока $I\approx 3,5$ А. Рассчитать стоимость (в копейках) затраченной электрической энергии A (кВт · ч) при тарифе 13 к. за 1 кВт · ч ($A=UIt$).

290 Чтобы найти диаметр проволоки, ее намотали на стержень, укладывая витки рядом друг с другом. Оказалось, что 22 витка заняли 9 мм по длине стержня. Найти диаметр проволоки.

291 Вычислить силу тока на участке цепи, если его сопротивление $R\approx 0,75$ Ом и падение напряжения на этом участке $U\approx 10,2$ В.

292 Рассчитать сопротивление участка цепи, падение напряжения на котором $U\approx 3,45$ В, при силе тока в цепи $I\approx 2,1$ А.

293 В цепь с напряжением $U\approx 220$ В включен электрический утюг мощностью тока $P\approx 0,35$ кВт. Определить силу тока I в цепи ($P=UI$).

Упражнения к главе II

Записать показания табло МК после выполнения действий **(294—298)**.

294 1) $-6,502\cdot 10^5-4,987\cdot 10^6$;

2) $3,128\cdot 10^6+5,24\cdot 10^7$;

3) $1,23456\cdot 10^{43}+9,87601\cdot 10^{42}$;

4) $-8,7654\cdot 10^{31}-1,2345\cdot 10^{32}$.

295 1) $123\,456\cdot 4,598\cdot 10^9$; 2) $3,874\cdot 10^{11}\cdot 98\,765$;

3) $(5,8\cdot 10^{13}):(3,4\cdot 10^{15})$; 4) $(7,1\cdot 10^{24}):(5,6\cdot 10^{27})$.

296 1) $5897+6453-282-384$; 2) $7654-2835+351-405$;

3) $4,58\cdot 3,57:1,2\cdot 4,57$; 4) $45,28:2,3\cdot 357:132$.

297 1) $4{,}4\cdot 6{,}5\cdot 1{,}5-247:13-1188-44$;

2) $2{,}4\cdot 2{,}5-60{,}2:14-76{,}8\cdot 3{,}5:48$.

298 1) $\left(\frac{87\cdot 43}{68}+25\right):83$; 2) $\left(\frac{125\cdot 51}{234}-4{,}35\right)\cdot 2{,}8$.

Проверь себя!

1 Представить дробь $\frac{4}{9}$ в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

2 Записать в стандартном виде число:

$$44{,}301;\quad 0{,}483;\quad -0{,}25.$$

3 Вычислить с точностью до 0,01:

1) $\frac{348}{27}+34\cdot 78$; 2) $\frac{1}{0{,}48}+\frac{1}{2{,}39}$; 3) $\frac{2{,}5\cdot 3{,}7}{1{,}8}-\frac{18{,}9}{3{,}4\cdot 2{,}6}$.

299 Вычислить сопротивление R медного стержня, длина которого $l\approx 0{,}25$ м, площадь поперечного сечения $S\approx 1{,}2\cdot 10^2$ мм^2, если удельное сопротивление меди $\rho\approx 0{,}017$ Ом $\cdot$ мм^2/м $\left(R=\frac{\rho l}{S}\right)$.

300 Вычислить кинетическую энергию тела по формуле

$$E_k=\frac{mv^2}{2},\ \text{если}\ m\approx 7{,}6\ \text{кг},\ v\approx 4{,}2\ \text{м/с}.$$

301 Вычислить по формуле $Q=I^2Rt$ количество тепла Q, выделяемое проводником за $t=15$ с, если его сопротивление $R\approx 34$ Ом и по нему проходит ток силой $I\approx 17$ А.

302 В городе с населением $5{,}70\cdot 10^4$ человек было проведено медицинское обследование населения с целью выявления частоты встречающихся групп крови. Выяснили, что людей с группой крови I приблизительно 32,9%, с группой крови II — 35,8%, с группой III — 23,2% и с группой IV — 8,1%. Сколько приблизительно человек с каждой из групп крови проживает в городе?

303 Упростить выражение и найти его числовое значение с точностью до 0,0001:

1) $\frac{a^2+12}{a^2-4}-\frac{a+2}{a-2}$ при $a=4{,}31\cdot 10^3$;

2) $\frac{a+b}{a+2b}:\left(\frac{a}{a-2b}+\frac{b^2}{a^2-4b^2}\right)$ при $a=3{,}78\cdot 10^4$, $b=4{,}23\cdot 10^4$.

304 Дана функция $y=2{,}1+\frac{1}{x}$. Найти с точностью до 0,1 значения функции при $x=0{,}471$; $1{,}551$; $3{,}483$; $10{,}48$.

305 Калорийность суточного рациона питания для детей 11—15 лет составляет примерно 3000 ккал. Найти калорийность предложенного ниже суточного меню для подростков оздоровительного лагеря.

Завтрак		*Калорийность (ккал на 100 г продукта)*
Творог	125 г	86
Сыр голландский	50 г	380
Хлеб пшеничный	30 г	236
Масло сливочное	25 г	661
Кофе натур. со сгущенным молоком	200 г	310
Обед		
Суп из говядины	150 г	187
Курица отварная	125 г	241
Макароны	100 г	332
Салат из помидоров	100 г	19
Компот из сухофруктов	200 г	223
Хлеб ржаной	50 г	190
Ужин		
Сосиски	150 г	324
Картофель	100 г	83
Каша манная	100 г	326
Хлеб пшеничный	30 г	236
Чай	200 г	—

III
глава

Квадратные корни

§ 20 Арифметический квадратный корень

Задача 1 Сторона квадратного участка земли равна 12 м. Найти его площадь S.

▶ Площадь участка равна квадрату его стороны:

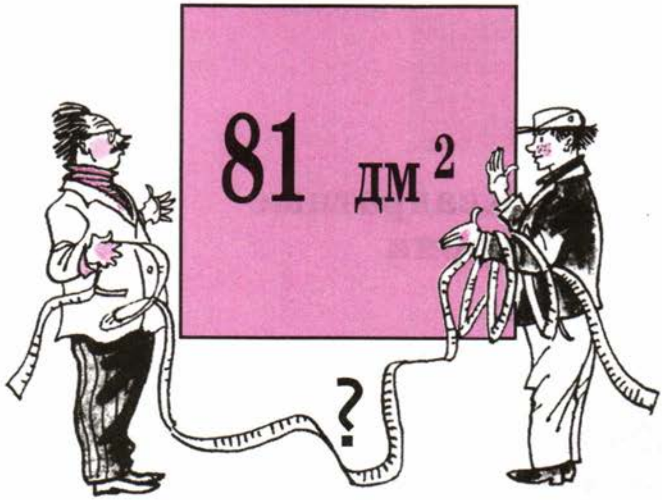
$$S = 12^2 = 144\ (\text{м}^2).\ \triangleleft$$

Задача 2 Площадь квадратного участка земли равна 81 дм^2. Найти его сторону.

▶ Предположим, что длина стороны квадрата равна x дециметрам. Тогда площадь участка равна x^2 квадратным дециметрам. Так как по условию эта площадь равна 81 дм^2, то $x^2 = 81$. Длина стороны квадрата — положительное число. Положительным числом, квадрат которого равен 81, является число 9.

Ответ 9 дм. ◁

В задаче **2** требовалось найти число x, квадрат которого равен 81, т. е. решить уравнение $x^2 = 81$. Это уравнение можно записать в виде $x^2 - 81 = 0$ или $(x-9)(x+9) = 0$, откуда $x_1 = 9$, $x_2 = -9$. Числа 9 и -9 обращают уравнение $x^2 = 81$ в верное числовое равенство, т. е. $9^2 = 81$ и $(-9)^2 = 81$. Эти числа называют *квадратными корнями* из числа 81. Один из квадратных корней — число 9, является положительным. Его называют *арифметическим квадрат-*



ным корнем из числа 81 и обозначают $\sqrt{81}$. Таким образом, $\sqrt{81} = 9$.

Определение. Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначается так: $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\ }$ называется *знаком арифметического квадратного корня*; a называется *подкоренным выражением*. Выражение $\sqrt{a}$ читается так: «Арифметический квадратный корень из числа a».

Например, $\sqrt{36} = 6$, так как $6 > 0$ и $6^2 = 36$.

Приведем другие примеры:

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}, \quad \sqrt{0{,}49} = 0{,}7.$$

В случаях, когда ясно, что речь идет об арифметическом квадратном корне, говорят: «Корень квадратный». *Действие нахождения квадратного корня из числа называют извлечением квадратного корня.* Возводить в квадрат можно любые числа, но извлекать квадратный корень можно не из любого числа. Например, нельзя извлечь квадратный корень из числа -4, так как нет такого числа, квадрат которого равен -4.

Итак, выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только при $a \geqslant 0$. Определение квадратного корня можно кратко записать так:

$$\sqrt{a} \geqslant 0, \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

Равенство $(\sqrt{a})^2 = a$ справедливо при $a \geqslant 0$.

Задача 3 Вычислить $5\sqrt{32 \cdot 2} - 3\sqrt{2 \cdot 8}$.

▶ $5\sqrt{32 \cdot 2} - 3\sqrt{2 \cdot 8} = 5\sqrt{64} - 3\sqrt{16} = 5 \cdot 8 - 3 \cdot 4 = 28$. ◁

Упражнения

306 Найти сторону квадрата, если его площадь равна:
1) 16 м^2; 2) 100 дм^2; 3) 0,64 км^2; 4) $\frac{36}{49}$ мм^2.

307 Вычислить арифметический квадратный корень из числа: 81; 64; 100; 0,16; 0,09; 0,25; 1,44; 4900; 6400.

308 Верно ли равенство:
1) $\sqrt{16} = 4$; 2) $\sqrt{100} = 10$; 3) $\sqrt{25} = -5$; 4) $\sqrt{0} = 0$?

Вычислить **(309—311)**.

309 1) $(\sqrt{4})^2$; 2) $(\sqrt{9})^2$; 3) $\left(\sqrt{\frac{3}{12}}\right)^2$; 4) $(\sqrt{0,25})^2$.

310 1) $3 + \sqrt{4}$; 2) $7 - \sqrt{25}$; 3) $\sqrt{16} - 9$;
4) $4 \cdot \sqrt{0,01}$; 5) $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{0,81}$; 6) $0,25 \cdot \sqrt{0,25}$.

311 1) $2^3 + 5\sqrt{16}$; 2) $3\sqrt{121} - 2\sqrt{144}$;
3) $2\sqrt{3 \cdot 27} - 6\sqrt{2 \cdot 18}$; 4) $\sqrt{2^2 + 3 \cdot 7}$;
5) $\sqrt{3^2 + 4^2}$; 6) $\sqrt{17^2 - 15^2}$.

312 Найти значение выражения:
1) $3\sqrt{10 - 2a}$ при $a = -3$, $a = 3$, $a = 5$;
2) $5\sqrt{6x - 2}$ при $x = 1$, $x = \frac{1}{3}$, $x = 3$.

313 При каких значениях a имеет смысл выражение:
1) $\sqrt{2a}$; 2) $\sqrt{-a}$; 3) $\sqrt{2 - a}$; 4) $\sqrt{3 + a}$?

314 Решить уравнение:
1) $\sqrt{x} = 2$; 2) $\sqrt{x} = 10$.

315 Сравнить числа:
1) $\sqrt{\frac{16}{25}}$ и $\sqrt{\frac{9}{16}}$; 2) $\sqrt{0,04}$ и $\sqrt{0,09}$.

§ 21 Действительные числа

1. Рациональные числа.

Появление новых чисел в математике связано с необходимостью выполнения тех или иных действий. При сложении и умножении натуральных чисел всегда получаются натуральные числа. Однако при вычитании двух натуральных чисел не всегда получается натуральное число. Например, разность $2-5$ не является натуральным числом. Чтобы вычитание было всегда выполнимо, были введены *отрицательные числа* и *число* 0. Множество натуральных чисел расширилось до множества целых чисел:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

При сложении, умножении, вычитании целых чисел всегда получаются целые числа. Однако при делении двух целых чисел не всегда получается целое число. Например, частное $2:5$ — нецелое число. Чтобы деление было всегда выполнимо, были введены *рациональные числа*, т. е. числа вида $\frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число. Множество целых чисел расширилось до множества рациональных чисел.

При выполнении четырех арифметических действий (кроме деления на нуль) над рациональными числами всегда получаются рациональные числа. *Рациональное число можно записать в виде десятичной дроби, конечной или бесконечной.* Например, числа $\frac{2}{5}$ и $\frac{3}{4}$ можно записать в виде конечных десятичных дробей: $\frac{2}{5}=0{,}4$; $\frac{3}{4}=0{,}75$. Числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{11}$ после деления «уголком» можно записать в виде бесконечных десятичных дробей:

$$\frac{1}{3}=0{,}333\ldots; \quad \frac{5}{11}=0{,}454545\ldots .$$

В записи бесконечной десятичной дроби 0,333... повторяется цифра 3.

Цифру 3 называют *периодом этой дроби*; саму дробь называют *периодической с периодом* 3, записывают в виде 0,(3) и читают: «Нуль целых и три в периоде».

В записи дроби 0,454545... повторяется группа из двух цифр: 45; эту дробь называют периодической с периодом 45 и записывают в виде 0,(45). Приведем еще примеры бесконечных периодических дробей:

$$-\frac{7}{30} = -0{,}2333\ldots = -0{,}2(3);$$

$$27\frac{13}{330} = 27{,}0393939\ldots = 27{,}0(39).$$

Любое рациональное число можно представить либо в виде конечной десятичной дроби, либо в виде бесконечной периодической десятичной дроби. И наоборот, любую бесконечную периодическую или конечную десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби, т. е. в виде $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Задача 1 Представить число $\frac{27}{11}$ в виде бесконечной десятичной дроби.

▶ Воспользуемся алгоритмом деления «уголком»:

$$\begin{array}{l|l}
-\begin{array}{r}27\\ \underline{22}\end{array} & \begin{array}{l}11\\ \hline 2{,}4545\ldots\end{array}\\
\quad -\begin{array}{r}50\\ \underline{44}\end{array} & \\
\qquad -\begin{array}{r}60\\ \underline{55}\end{array} & \\
\qquad\quad -\begin{array}{r}50\\ \underline{44}\end{array} & \\
\qquad\qquad -\begin{array}{r}60\\ \underline{55}\end{array} & \\
\qquad\qquad\qquad 5 &
\end{array}$$

Остатки повторяются, поэтому в частном повторяется одна и та же группа цифр: 45. Следовательно, $\frac{27}{11} = 2{,}4545\ldots = 2{,}(45)$.

Ответ 2,(45). ◁

Задача 2 Представить в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь:

1) 1,(7); 2) 0,2(18).

▶ 1) Пусть $x = 1,(7) = 1,777\ldots$, тогда $10x = 17,(7) = 17,777\ldots$.

Вычитая из второго равенства первое, получаем $9x = 16$, откуда $x = \frac{16}{9}$.

2) Пусть $x = 0,2(18) = 0,2181818\ldots$, тогда

$$10x = 2,(18) = 2,181818\ldots,$$
$$1000x = 218,(18) = 218,181818\ldots.$$

Вычитая из третьего равенства второе, получаем $990x = 216$, откуда $x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55}$.

Ответ 1) $1,(7) = 1\frac{7}{9}$; 2) $0,2(18) = \frac{12}{55}$. ◁

2. Иррациональные числа. Действительные числа.

Наряду с бесконечными периодическими десятичными дробями в математике рассматриваются также и *бесконечные десятичные непериодические дроби*.

Например, дробь 0,1010010001..., в которой после первой цифры 1 стоит один нуль, после второй цифры 1 — два нуля и т. д., является непериодической. Непериодической является также дробь 0,123456..., в которой после запятой записаны подряд все натуральные числа.

Бесконечные десятичные непериодические дроби называют *иррациональными числами*. Рациональные и иррациональные числа образуют *множество действительных чисел* (рис. 28).

Рис. 28

Арифметические действия и правила сравнения для действительных чисел определяются так, что свойства этих действий, а также свойства равенств и неравенств оказываются такими же, как и для рациональных чисел.

Обратимся к действию извлечения корня. В курсе высшей математики доказывается, что из любого неотрицательного действительного числа можно извлечь квадратный корень. В результате извлечения квадратного корня может получиться как рациональное, так и иррациональное число. Например, $\sqrt{1{,}21} = 1{,}1$ — рациональное число, а $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ — иррациональное число.

Иррациональными являются также числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$ и т. д., т. е. квадратные корни из натуральных чисел, которые не являются квадратами натуральных чисел.

Заметим, что *иррациональные числа получаются не только при извлечении квадратных корней.* Например, число π, равное отношению длины окружности к ее диаметру, является иррациональным числом; отметим, что число π не может быть получено извлечением корня из рационального числа.

На практике для нахождения приближенных значений квадратных корней с требуемой точностью используются таблицы, микрокалькуляторы и другие вычислительные средства.

Задача 3 Вычислить на МК приближенное значение $\sqrt{14}$ с точностью до 0,001.

▶ 14 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\underline{3{,}7416573}$.

Ответ 3,742. ◁

Задача 4 Вычислить на МК с точностью до 0,1:

$$23 \cdot \sqrt{34 + \sqrt{26}}.$$

▶ Запишем данное выражение в виде

$$(\sqrt{34 + \sqrt{26}}) \cdot 23$$

и вычислим его значение по программе

34 $\boxed{+}$ 26 $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\sqrt{\ }}$ $\boxed{\times}$ 23 $\boxed{=}$ $\underline{143{,}81718}$.

Ответ 143,8. ◁

Задача 5 Вычислить на МК с точностью до 0,01:

$$\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}.$$

▶ Запишем данное выражение в виде $\sqrt{\sqrt{3+\sqrt{5}}+2}$ и вычислим его по программе

$$3\ \boxed{+}\ 5\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{+}\ 2$$

$$\boxed{=}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \underline{2{,}0708079}.$$

Ответ 2,07. ◁

Итак, практические действия над иррациональными числами заменяются действиями над их десятичными приближениями.

Геометрически действительные числа изображаются точками числовой оси (рис. 29). Каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой оси, и каждой точке числовой оси соответствует единственное действительное число.

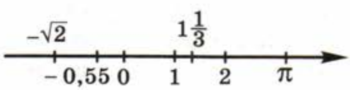


Рис. 29

Упражнения

316 Прочитать дробь:
1) 0,(2); 2) 2,(21); 3) 15,3(53); 4) −2,77(3).

317 Записать в виде конечной или бесконечной периодической десятичной дроби:
1) $\frac{1}{4}$; 2) $\frac{1}{125}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{3}{11}$; 5) $-\frac{3}{5}$; 6) $-3\frac{1}{7}$.

318 Записать в виде обыкновенной дроби бесконечную десятичную периодическую дробь:
1) 0,(6); 2) 0,(7); 3) 4,1(25); 4) 2,3(81).

319 Сравнить числа:
1) 0,35 и 0,(35); 2) 1,03 и 1,0(3);
3) 2,41 и 2,4(1); 4) 3,7(2) и 3,72.

320 Даны числа: -8; $-\sqrt{16}$; $-0{,}3$; $-\frac{5}{2}$; 12; $\sqrt{7}$; 0; $\sqrt{\frac{1}{9}}$; 1. Выписать те из них, которые являются: натуральными; целыми; рациональными.

321 (Устно.) Какие из указанных чисел являются иррациональными:
-2; 1; 0; $\sqrt{11}$; $\sqrt{16}$; $-1{,}7$; $\sqrt{17}$; $\frac{4}{5}\sqrt{225}$?

322 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,001:
1) $\sqrt{8}$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $\sqrt{6{,}6}$; 4) $\sqrt{4{,}3}$; 5) $\sqrt{0{,}5}$; 6) $\sqrt{0{,}05}$.

323 Площадь квадрата равна 12 м^2. Найти длину его стороны с точностью до 1 см.

№ 4

КАКИЕ ЦИФРЫ ЗАШИФРОВАНЫ БУКВАМИ В ПРИВЕДЕННОЙ ЗАПИСИ СЛОЖЕНИЯ ЧИСЕЛ:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \textit{С М Е Х} \\ \textit{Г Р О М} \end{array} \\ \hline \textit{Г Р Е М И} \end{array}$$

324 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:

1) $\sqrt{57}+\sqrt{31}-\sqrt{23}$; 2) $\sqrt{87}-\sqrt{54}+\sqrt{17}$;

3) $\sqrt{687+\sqrt{123}}$; 4) $\sqrt{801-\sqrt{250}}$;

5) $\sqrt{\sqrt{35604-\sqrt{28}}}$; 6) $\sqrt{\sqrt{6023}+\sqrt{5785}}$;

7) $\dfrac{38}{\sqrt{\sqrt{55}-\sqrt{28}}}$; 8) $\dfrac{871}{\sqrt{13^2+18^2}}$.

325 Вычислить с точностью до 0,1 на микрокалькуляторе:

1) $\dfrac{39}{\sqrt{5}}+\dfrac{44}{\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{86}{\sqrt{2}}-\dfrac{23}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{132^2+153^2}$; 4) $\sqrt{189^2-65^2}$;

5) $\sqrt{33^2+18^2-23^2}$; 6) $\sqrt{57^2-37^2+16^2}$;

7) $\dfrac{34}{\sqrt{28^2-17^2}}$.

326 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{5+\sqrt{3+\sqrt{2}}}$; 2) $\sqrt{\sqrt{8+\sqrt{2}}-1}$;

3) $\sqrt{\sqrt{3}+4\sqrt{5}}$; 4) $\sqrt{6\sqrt{5}-\sqrt{13}}$.

§ 22

Квадратный корень из степени

Вычислим значение выражения $\sqrt{a^2}$ при $a = 3$ и $a = -3$. По определению квадратного корня $\sqrt{3^2} = 3$. При $a = -3$ находим $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{3^2} = 3$. Так как число 3 является противоположным числу -3, то можно записать:

$$\sqrt{(-3)^2} = -(-3) \text{ или } \sqrt{(-3)^2} = |-3|.$$

Теорема 1. Для любого числа a справедливо равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

Рассмотрим два случая: $a \geqslant 0$ и $a < 0$.

1) Если $a \geqslant 0$, то по определению арифметического корня

$$\sqrt{a^2} = a.$$

2) Если $a < 0$, то $(-a) > 0$ и поэтому

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = -a.$$

Таким образом,

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0, \end{cases}$$

т. е. $\sqrt{a^2} = |a|$. ○

Например, $\sqrt{(-8)^2} = |-8| = 8$.

Вместо того чтобы говорить, что равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ выполняется при любых значениях входящих в него букв, говорят, что это равенство выполняется *тождественно*.

Равенства, справедливые при любых значениях входящих в них букв, называют *тождествами*.

Приведем примеры тождеств:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Задача 1 Упростить: 1) $\sqrt{a^8}$; 2) $\sqrt{a^6}$.

▶ 1) $\sqrt{a^8}=\sqrt{(a^4)^2}=|a^4|$. Так как $a^4 \geqslant 0$ при любом a, то $|a^4|=a^4$ и поэтому $\sqrt{a^8}=a^4$.

2) $\sqrt{a^6}=\sqrt{(a^3)^2}=|a^3|$.

Если $a \geqslant 0$, то $a^3 \geqslant 0$ и поэтому $|a^3|=a^3$.
Если $a<0$, то $a^3<0$ и поэтому $|a^3|=-a^3$.
Итак, в этом случае знак модуля следует оставить: $\sqrt{a^6}=|a^3|$. ◁

Теорема 2. Если $a>b>0$, то $\sqrt{a}>\sqrt{b}$.

● В самом деле, если допустить, что $\sqrt{a} \leqslant \sqrt{b}$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим $a \leqslant b$, что противоречит условию $a>b$. ○

Например, $\sqrt{256}>\sqrt{225}$, так как $256>225$; $3<\sqrt{10}<4$, так как $9<10<16$.

Задача 2 Упростить выражение $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}$.

▶ Используя тождество $\sqrt{a^2}=|a|$, получаем:

$$\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}=|\sqrt{8}-3|.$$

Так как $8<9$, то по теореме 2 получаем $\sqrt{8}<3$. Поэтому $\sqrt{8}-3<0$ и $|\sqrt{8}-3|=-(\sqrt{8}-3)=3-\sqrt{8}$.

Ответ $3-\sqrt{8}$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $\sqrt{(x-7)^2}=x-7$.

▶ Так как $\sqrt{(x-7)^2}=|x-7|$, то исходное равенство принимает вид:

$$|x-7|=x-7.$$

Это равенство справедливо только при $x-7 \geqslant 0$, т. е. при $x \geqslant 7$.

Ответ $x \geqslant 7$. ◁

Задача 4 Упростить выражение $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

▶ Заметим, что $7-4\sqrt{3}=4-4\sqrt{3}+3=(2-\sqrt{3})^2$. Поэтому

$$\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3},$$

так как $2=\sqrt{4}$, $\sqrt{4}>\sqrt{3}$. ◁

Упражнения

327 Верно ли равенство:

1) $\sqrt{5^2}=5$; 2) $\sqrt{(-5)^2}=5$;

3) $\sqrt{(-5)^2}=-5$; 4) $\sqrt{(-5)^2}=|-5|$?

328 Найти значение выражения $\sqrt{x^2}$ при:

1) $x=1$; 2) $x=2$; 3) $x=0$; 4) $x=-2$.

329 Вычислить:

1) $\sqrt{3^6}$; 2) $\sqrt{2^8}$; 3) $\sqrt{5^4}$;

4) $\sqrt{11^4}$; 5) $\sqrt{(-3)^4}$; 6) $\sqrt{(-5)^6}$.

330 Упростить:

1) $\sqrt{n^8}$; 2) $\sqrt{x^{12}}$;

3) $\sqrt{a^{14}}$, $a>0$; 4) $\sqrt{b^6}$.

331 Найти значение выражения $\sqrt{x^2-2x+1}$ при:

1) $x=5$; 2) $x=1$;

3) $x=0$; 4) $x=-5$.

332 Сравнить числа:

1) 4 и $\sqrt{15}$; 2) 2,7 и $\sqrt{7}$;

3) $\sqrt{3{,}26}$ и 1,8; 4) $\sqrt{18{,}49}$ и 4,3.

333 Показать, что:

1) $4<\sqrt{17}<5$; 2) $3<\sqrt{10}<4$;

3) $3{,}1<\sqrt{10}<3{,}2$; 4) $6{,}1<\sqrt{38}<6{,}2$.

334 Найти два последовательных целых числа, между которыми заключено число:

1) $\sqrt{39}$; 2) $\sqrt{160}$;

3) $\sqrt{0{,}9}$; 4) $\sqrt{8{,}7}$.

335 Упростить:

1) $\sqrt{(4-\sqrt{5})^2}$; 2) $\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$;

3) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; 4) $\sqrt{(\sqrt{15}-4)^2}$.

336 Упростить выражение:

1) $\sqrt{(x-5)^2}$, если $x\geqslant 5$;

2) $\sqrt{(a+3)^2}$, если $a<-3$;

3) $\sqrt{1+4k+4k^2}$, если $k\geqslant -0{,}5$;

4) $\sqrt{a^2-6ab+9b^2}$, если $a<3b$.

337 Доказать, что:

1) $a+5-\sqrt{(a-5)^2}=2a$, если $a \leqslant 5$;

2) $x+y+\sqrt{(x-y)^2}=\begin{cases}2x, \text{ если } x \geqslant y,\\ 2y, \text{ если } x<y.\end{cases}$

338 Решить уравнение:

1) $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$; 2) $\sqrt{(x-2)^2}=2-x$.

339 Упростив, вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; 2) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}$.

§ 23 Квадратный корень из произведения

Задача 1 Показать, что $\sqrt{16 \cdot 25}=\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}$.

▶ $\sqrt{16 \cdot 25}=\sqrt{400}=20$; $\sqrt{16} \cdot \sqrt{25}=4 \cdot 5=20$. ◁

Теорема. Если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, то

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

т. е. корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению корней из этих множителей.

● Для того чтобы доказать, что $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ есть арифметический квадратный корень из ab, надо доказать, что:

1) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$; 2) $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2=ab$.

По определению квадратного корня $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} \geqslant 0$, поэтому $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geqslant 0$. По свойству степени произведения и определению квадратного корня

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2=(\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2=ab. \ ○$$

Например,

$$\sqrt{2304} = \sqrt{36 \cdot 64} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{64} = 6 \cdot 8 = 48.$$

По доказанной теореме *при умножении корней* можно перемножить подкоренные выражения и из результата извлечь корень: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Например, $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$.

Отметим, что теорема справедлива для любого числа неотрицательных множителей. Например:

$$\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}, \text{ если } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0.$$

Задача 2 Вычислить $\sqrt{54 \cdot 24}$.

▶ $\sqrt{54 \cdot 24} = \sqrt{9 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4} = \sqrt{9 \cdot 36 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{36} \cdot \sqrt{4} =$
$= 3 \cdot 6 \cdot 2 = 36.$ ◁

Пусть дано выражение $\sqrt{a^2 b}$. Если $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, то по теореме о корне из произведения можно записать:

$$\sqrt{a^2 b} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b} = a\sqrt{b}.$$

Такое преобразование называется *вынесением множителя из-под знака корня.*

Задача 3 Упростить выражение $2\sqrt{27} + \sqrt{12}$.

▶ $2\sqrt{27} + \sqrt{12} = 2\sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{4 \cdot 3} = 6\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$ ◁

В некоторых случаях полезно *вносить множители под знак корня*, т. е. выполнять преобразование вида

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \text{ где } a \geqslant 0,\ b \geqslant 0.$$

Задача 4 Упростить выражение

$$3a\sqrt{\frac{b}{a}} - 2b\sqrt{\frac{a}{b}},$$

где $a > 0$, $b > 0$.

▶ Внося положительные множители a и b под знак корня, получаем:

$$3a\sqrt{\frac{b}{a}} - 2b\sqrt{\frac{a}{b}} = 3\sqrt{a^2 \cdot \frac{b}{a}} - 2\sqrt{b^2 \cdot \frac{a}{b}} =$$
$$= 3\sqrt{ab} - 2\sqrt{ab} = \sqrt{ab}.$$ ◁

Упражнения

Вычислить **(340—341)**.

340 1) $\sqrt{49\cdot 25}$; 2) $\sqrt{0{,}01\cdot 169}$;
3) $\sqrt{625\cdot 9\cdot 36}$; 4) $\sqrt{256\cdot 0{,}25\cdot 81}$.

341 1) $\sqrt{8\cdot 50}$; 2) $\sqrt{32\cdot 50}$; 3) $\sqrt{108\cdot 27}$; 4) $\sqrt{27\cdot 12}$.

342 Вычислить с помощью разложения подкоренного выражения на множители:
1) $\sqrt{3136}$; 2) $\sqrt{6084}$; 3) $\sqrt{4356}$; 4) $\sqrt{1764}$.

Вычислить **(343—346)**.

343 1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$; 2) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{90}$;
3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}$; 4) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{22}\cdot\sqrt{11}$;
5) $\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3}$; 6) $\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\sqrt{\frac{5}{7}}\cdot\sqrt{\frac{7}{8}}$.

344 1) $\sqrt{113^2-112^2}$; 2) $\sqrt{82^2-18^2}$;
3) $\sqrt{65^2-63^2}$; 4) $\sqrt{313^2-312^2}$.

345 1) $\sqrt{5^4\cdot 3^2}$; 2) $\sqrt{7^4\cdot 2^6}$; 3) $\sqrt{(-5)^6\cdot(0{,}1)^2}$; 4) $\sqrt{12^2\cdot 3^4}$.

346 1) $(\sqrt{8}+\sqrt{2})^2$; 2) $(\sqrt{7}-\sqrt{28})^2$;
3) $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$; 4) $(5\sqrt{2}+2\sqrt{5})(5\sqrt{2}-2\sqrt{5})$.

Вынести множитель из-под знака корня (буквами обозначены положительные числа) **(347—348)**.

347 1) $\sqrt{16x}$; 2) $\sqrt{2x^2}$; 3) $\sqrt{5a^4}$; 4) $\sqrt{3a^6}$.

348 1) $\sqrt{8y}$; 2) $\sqrt{75a^2}$; 3) $\sqrt{7m^8}$; 4) $\sqrt{50a^3}$.

349 Упростить выражение:
1) $3\sqrt{20}-\sqrt{5}$; 2) $\frac{1}{3}\sqrt{18}+2\sqrt{2}$;
3) $2\sqrt{27}-\sqrt{12}$; 4) $2\sqrt{20}-2\sqrt{45}+\frac{1}{4}\sqrt{16}$;
5) $5\sqrt{8}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-2\sqrt{18}$; 6) $3\sqrt{48}-\sqrt{75}+\frac{1}{7}\sqrt{147}$.

350 Внести множитель под знак корня:
1) $2\sqrt{2}$; 2) $3\sqrt{3}$; 3) $2\sqrt{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\sqrt{28}$; 4) $10\sqrt{0{,}03}$.

351 Внести множитель под знак корня (буквами обозначены положительные числа):
1) $a\sqrt{a}$; 2) $a\sqrt{2}$; 3) $a\sqrt{\frac{1}{a}}$; 4) $\frac{1}{x^2}\sqrt{3x^5}$.

352 Сравнить:

1) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$; 2) $2\sqrt{40}$ и $4\sqrt{10}$;

3) $4\sqrt{8}$ и $2\sqrt{18}$; 4) $2\sqrt{45}$ и $4\sqrt{20}$.

353 Упростить:

1) $b\sqrt{\frac{a}{b}}+a\sqrt{\frac{b}{a}},\ a>0,\ b>0$;

2) $\frac{2}{3}\sqrt{9x^3}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}},\ x>0$.

354 Вычислить:

1) $(\sqrt{5}-\sqrt{45})^2-(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{11}-\sqrt{13})$;

2) $(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{7}+\sqrt{11})-(\sqrt{12}-\sqrt{3})^2$.

355 Упростить выражение:

1) $\frac{1}{2}\sqrt{128}+3\sqrt{2}+2\sqrt{72}$; 2) $3\sqrt{45}-\sqrt{125}+\sqrt{80}$;

3) $-\frac{2}{3}\sqrt{27}+\frac{1}{5}\sqrt{300}+5\sqrt{3}$; 4) $2\sqrt{8}+0{,}5\sqrt{32}-\frac{1}{3}\sqrt{18}$.

356 Упростить выражение (буквами обозначены положительные числа):

1) $\frac{1}{3}\sqrt{9x^5}+\frac{1}{2}\sqrt{4x^3}-x\sqrt{x}+x\sqrt{x^3}$;

2) $3\sqrt{0{,}04a^3b^3}-2\sqrt{0{,}25a^3b^5}+4b\sqrt{\frac{1}{16}a^3b^3}$.

357 Разложить на множители по образцу ($a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$)

$$9-a=(3-\sqrt{a})(3+\sqrt{a}):$$

1) $25-a$; 2) $b-16$; 3) $0{,}01-a$; 4) $b-\frac{9}{49}$.

358 Сократить дробь ($a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$):

1) $\frac{25-a}{5+\sqrt{a}}$; 2) $\frac{b-16}{4+\sqrt{b}}$; 3) $\frac{0{,}49-a}{\sqrt{a}+0{,}7}$; 4) $\frac{0{,}81-b}{0{,}9+\sqrt{b}}$.

359 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:

1) $\sqrt{23}\cdot\sqrt{51}$; 2) $\sqrt{123}\cdot\sqrt{63}$;

3) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}\cdot\sqrt{19}$; 4) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{21}$;

5) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{8}\cdot\sqrt{13}$; 6) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{7}$.

360 Доказать равенство

$$\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b}}=\sqrt{a+\sqrt{b}}+\sqrt{a-\sqrt{b}},$$

если $a\geqslant\sqrt{b},\ b\geqslant 0$.

361 Построить график функции:

1) $y=\sqrt{x^2}$; 2) $y=\sqrt{(x-1)^2}$.

§ 24 Квадратный корень из дроби

Задача 1 Показать, что $\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}$.

▶ $\sqrt{\dfrac{25}{36}}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}}=\dfrac{5}{6}$. ◁

Теорема. Если $a \geqslant 0$, $b>0$, то

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

т. е. корень из дроби равен корню из числителя, деленному на корень из знаменателя.

● Требуется доказать, что:

1) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$; 2) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\dfrac{a}{b}$.

Так как $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\sqrt{b}>0$, то $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geqslant 0$.

По свойству возведения дроби в степень и определению квадратного корня получаем:

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2}=\frac{a}{b}. \ ○$$

Например, $\sqrt{\dfrac{121}{225}}=\dfrac{\sqrt{121}}{\sqrt{225}}=\dfrac{11}{15}$.

По доказанной теореме *при делении корней* можно разделить подкоренные выражения и из результата извлечь корень:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Например, $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{72}{2}}=\sqrt{36}=6$.

В некоторых задачах полезно *избавиться от иррациональных выражений в знаменателе дроби.*

Пусть дано выражение $\frac{a}{\sqrt{b}}$, где $b>0$. Умножая числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{b}$, получаем $\frac{a}{\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{a\cdot\sqrt{b}}{b}$. Например:

$$\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 2 Исключить иррациональность из знаменателя:

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$$

▶ Если умножить разность $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ на сумму $\sqrt{5}+\sqrt{3}$, то получится выражение, не содержащее корней. Поэтому

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{5-3}=$$

$$=\frac{5+2\sqrt{15}+3}{2}=4+\sqrt{15}.$$ ◁

Задача 3 Доказать, что среднее арифметическое двух положительных чисел a и b не меньше среднего геометрического этих чисел:

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}. \qquad (1)$$

● Требуется доказать, что

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geqslant 0.$$

Преобразуя левую часть этого неравенства, получаем:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geqslant 0.$$ ○

Заметим, что в соотношении (1) знак равенства имеет место только при $a=b$.

Задача 4 Продавец взвешивает яблоки на рычажных весах. Покупатель купил 1 кг яблок, а затем купил еще 1 кг, попросив продавца поменять местами при втором взвешивании гирю и яблоки. Кто понес убытки, если весы не отрегулированы?

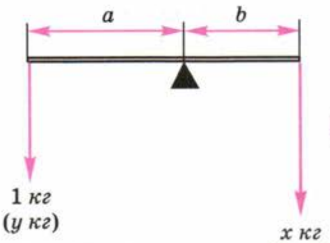


Рис. 30

▶ Пусть плечи весов равны a и b (рис. 30). При первом взвешивании покупатель приобрел x килограммов яблок. Из курса физики известно, что $x\cdot b=1\cdot a$, откуда $x=\frac{a}{b}$. При втором взвешивании покупатель приобрел y килограммов яблок. Из условия равновесия $y \cdot a = 1 \cdot b$ находим $y = \frac{b}{a}$. Итак, было куплено $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ килограммов яблок. Используя неравенство для среднего арифметического и геометрического чисел $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$, получаем $\frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}}$, откуда $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

Ответ Убыток понес продавец. ◁

Упражнения

Вычислить **(362—365)**.

362 1) $\sqrt{\frac{9}{100}}$; 2) $\sqrt{\frac{100}{49}}$; 3) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; 4) $\sqrt{5\frac{4}{9}}$.

363 1) $\sqrt{\frac{4}{9}} + \sqrt{\frac{1}{9}}$; 2) $5\sqrt{\frac{1}{25}} - 3\sqrt{\frac{1}{9}}$;

3) $\sqrt{\frac{25}{64}} + \sqrt{\frac{49}{144}}$; 4) $\sqrt{\frac{16}{81}} - \sqrt{\frac{169}{225}}$.

364 1) $\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$; 2) $\frac{\sqrt{128}}{\sqrt{8}}$; 3) $\frac{4\sqrt{40}}{\sqrt{10}}$; 4) $\frac{20\sqrt{18}}{5\sqrt{2}}$.

365 1) $\sqrt{\frac{64 \cdot 49}{196 \cdot 324}}$; 2) $\sqrt{5\frac{4}{9} \cdot 11\frac{14}{25}}$;

3) $\sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{4}{81} \cdot \frac{36}{169}}$; 4) $\sqrt{\frac{9}{16} \cdot 5^2}$.

366 Исключить иррациональность из знаменателя:

1) $\frac{3}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{6}}$; 3) $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$;

4) $\frac{1}{3 + \sqrt{2}}$; 5) $\frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$; 6) $\frac{3}{\sqrt{5} + \sqrt{2}}$;

7) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{7}}{\sqrt{5} + \sqrt{7}}$; 8) $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{8}}{\sqrt{10} - \sqrt{8}}$.

367 На микрокалькуляторе вычислить с точностью до 0,01 разность между средним арифметическим и средним геометрическим чисел:

1) 17 и 39; 2) 71 и 86;

3) 134,2 и 243,1; 4) 150,3 и 210,4.

368 Площадь одного квадрата 72 см^2, а площадь другого квадрата 2 см^2. Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата?

369 Извлечь корень:

1) $\sqrt{\frac{25a^8}{49}}$; 2) $\sqrt{\frac{121x^4}{64}}$;

3) $\sqrt{\frac{1}{4a^2}}$, где $a>0$; 4) $\sqrt{\frac{400}{a^2}}$, где $a<0$.

370 Упростить выражение:

1) $(x-3)\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+9}}$ при: а) $x>3$; б) $x<3$;

2) $(2-a)\sqrt{\frac{1}{a^2-4a+4}}$ при: а) $a>2$; 2) $a<2$.

371 Вычислить:

1) $\frac{3}{2+\sqrt{6}}+\frac{3}{2-\sqrt{6}}$; 2) $\frac{5}{3-\sqrt{11}}+\frac{5}{3+\sqrt{11}}$;

3) $\frac{2}{\sqrt{11}-3}-\frac{7}{\sqrt{11}-2}$; 4) $\frac{3}{3+\sqrt{6}}+\frac{2}{2+\sqrt{6}}$;

5) $\frac{3}{\sqrt{7}-2}-\frac{2}{\sqrt{7}+3}-2\sqrt{7}$; 6) $\frac{1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}+\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

372 Доказать с помощью неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geqslant 2.$$

373 Упростить выражение:

1) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{b}$; 2) $2(\sqrt{x}+\sqrt{y})-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$;

3) $\frac{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}$; 4) $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{a+\sqrt{ab}+b}$.

374 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,01:

1) $\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{26}}$; 2) $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{46}}$; 3) $\frac{\sqrt{26}\cdot\sqrt{35}}{\sqrt{22}}$;

4) $\frac{\sqrt{54}\cdot\sqrt{67}}{\sqrt{39}}$; 5) $\frac{\sqrt{21}\cdot\sqrt{17}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{45}}$; 6) $\frac{\sqrt{37}\cdot\sqrt{40}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{33}}$.

375 Доказать, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство:

1) $\sqrt{ab}\geqslant\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$; 2) $\sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

376 Построить график функции:

1) $y=\sqrt{x^2-2x+1}$; 2) $y=\sqrt{x^2-6x+9}$.

Упражнения к главе III

377 Вычислить:

1) $(\sqrt{3})^2$; 2) $(\sqrt{0,1})^2$; 3) $\left(\sqrt{\frac{5}{12}}\right)^2$; 4) $\sqrt{\left(3\frac{1}{3}\right)^2}$.

378 Что больше:

1) $\sqrt{17}$ или $\sqrt{82}$; 2) $\sqrt{0,2}$ или $\sqrt{0,3}$;

3) 3 или $\sqrt{10}$; 4) 5 или $\sqrt{24}$?

Вычислить **(379—382)**.

379 1) $\sqrt{21\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$; 2) $\sqrt{72\cdot 6\cdot 45\cdot 15}$;

3) $\sqrt{225\cdot 0,16\cdot 400}$; 4) $\sqrt{900\cdot 25\cdot 1,69}$.

380 1) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{63}$; 2) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{98}$; 3) $\sqrt{75}\cdot\sqrt{3}$; 4) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{40}$.

381 1) $\frac{4\sqrt{72}}{3\sqrt{8}}$; 2) $\frac{2\sqrt{63}}{\sqrt{28}}$; 3) $\frac{2\sqrt{45}}{\sqrt{80}}$; 4) $\frac{4\sqrt{99}}{9\sqrt{44}}$.

382 1) $\sqrt{2^8}$; 2) $\sqrt{3^6}$; 3) $\sqrt{5^4}$;

4) $\sqrt{6^6}$; 5) $\sqrt{(-3)^6}$; 6) $\sqrt{(-7)^4}$.

383 Упростить:

1) $3\sqrt{20}+\sqrt{28}+\sqrt{45}-\sqrt{63}$;

2) $\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}-8\sqrt{\frac{3}{8}}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\cdot 3\sqrt{\frac{3}{2}}$;

3) $(6\sqrt{45}-3\sqrt{20}+9\sqrt{80}):(3\sqrt{5})$;

4) $(7\sqrt{8}-14\sqrt{18}+0,7\sqrt{12}):(7\sqrt{2})$;

5) $\frac{5}{1+\sqrt{6}}+\frac{6}{3+\sqrt{6}}$;

6) $\frac{6}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}-\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

384 Сократить дробь:

1) $\frac{5a^2-35}{a-\sqrt{7}}$; 2) $\frac{x^3-3x}{x+\sqrt{3}}$; 3) $\frac{5x-5\sqrt{3}}{3-x^2}$;

4) $\frac{4\sqrt{a}+\sqrt{b}}{b-16a}$; 5) $\frac{\sqrt{15}-5}{\sqrt{6}-\sqrt{10}}$; 6) $\frac{9-2\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{2}}$.

Проверь себя!

1 Сравнить: 7 и $\sqrt{48}$; $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$.

2 Вычислить: $\sqrt{81 \cdot 49}$; $\sqrt{0{,}3 \cdot 120}$; $\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{(-17)^2}$; $\sqrt{3^6}$.

3 Упростить выражение:

$$3\sqrt{8} + \sqrt{2} - 3\sqrt{18};\quad (\sqrt{5} - \sqrt{2})^2;\quad (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}).$$

4 Вынести множитель из-под знака корня: $\sqrt{8a^3}$, $a \geqslant 0$.

5 Сократить дробь: $\frac{x^2 - 3}{x + \sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{x - y}$.

6 Исключить иррациональность из знаменателя: $\frac{5}{\sqrt{7}}$; $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$.

385 Решить уравнение:

1) $\sqrt{x - 1} = 4$;
2) $\sqrt{x + 9} = 5$;
3) $\sqrt{2(x - 1)} = 2$;
4) $\sqrt{2x - 7} = 1$.

386 При каких значениях x справедливо равенство:

1) $|x - 2| = x - 2$;
2) $|3 - x| = x - 3$;
3) $\sqrt{(x + 3)^2} = x + 3$;
4) $\sqrt{(5 - 2x)^2} = 2x - 5$?

387 Упростить выражение:

1) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ при:

а) $x < 1$; б) $1 \leqslant x \leqslant 3$; в) $x > 3$.

2) $y = \sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{a^2 - 10a + 25}$ при:

а) $a < 2$; б) $2 \leqslant a \leqslant 5$; в) $a > 5$.

388 Найти значение выражения $2x^2 - 5ax + 2a^2$ при $x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ и $a = \sqrt{6} - \sqrt{5}$.

389 Упростить выражение:

1) $\left(\sqrt{ab} - \frac{ab}{a + \sqrt{ab}}\right) : \frac{a^2 b}{a - b}$;

2) $\left(\frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} + \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}}\right) \cdot \frac{a - \sqrt{b}}{a^2 + b}$;

3) $\left(\frac{c - \sqrt{d}}{c + \sqrt{d}} - \frac{c + \sqrt{d}}{c - \sqrt{d}}\right) : \frac{2c\sqrt{d}}{c + \sqrt{d}}$;

4) $(2 + \sqrt{b})\left(\frac{2}{\sqrt{b} + 2} - \frac{2}{2 - \sqrt{b}} + \frac{2b}{4 - b}\right)$.

390 Сумма двух чисел равна $\sqrt{14}$, а их разность $\sqrt{10}$. Доказать, что произведение этих чисел равно 1.

391 Упростить:

1) $\sqrt{xy}\cdot\left(\frac{x}{y}\sqrt{xy}-2\sqrt{\frac{y}{x}}-\sqrt{\frac{1}{xy}}\right)$, где $x>0,\ y>0$;

2) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{ab}}-\frac{1}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}-b\sqrt{\frac{b}{a}}\right):\sqrt{ab}$, где $a>0,\ b>0$.

392 Исключить иррациональность из знаменателя:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{11}-\sqrt{3}}$; 3) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$; 4) $\frac{5-4\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-9}$.

393 Доказать, что если $a>0,\ b>0$, то $a-\sqrt{ab}+b\geqslant\sqrt{ab}$.

394 Вычислить на микрокалькуляторе приближенное значение корня с точностью до 0,01:

1) $\sqrt{4{,}6}$; 2) $\sqrt{2{,}13}$; 3) $\sqrt{3{,}148}$; 4) $\sqrt{13{,}69}$.

395 На микрокалькуляторе вычислить с точностью до 0,001 значение выражения $\sqrt{a+\frac{1}{a}-2}$ при:

1) $a=1{,}1$; 2) $a=1{,}19$; 3) $a=0{,}81$; 4) $a=0{,}9$.

396 Вычислить значение выражения $\sqrt{3x^2+8x-9}$ с точностью до 0,1, если:

1) $x=3$; 2) $x=4$; 3) $x=5{,}5$;
4) $x=6{,}3$; 5) $x=-25$; 6) $x=-31$.

397 Доказать, что если $a>0$ и $b>0$, то

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqslant 4.$$

398 Доказать, что для любых чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

399 Упростить выражение:

1) $y=\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{x^2-12x+36}$ при:

а) $x<4$; б) $4\leqslant x\leqslant 6$; в) $x>6$;

2) $y=\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{9x^2-6x+1}$ при:

а) $x<\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$; в) $x>\frac{1}{2}$.

400 Сравнить $\sqrt{a+b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, где $a\geqslant 0$ и $b\geqslant 0$.

IV
глава

Квадратные уравнения

§ 25 Квадратное уравнение и его корни

Задача 1 Основание прямоугольника больше высоты на 10 см, а его площадь равна 24 см^2. Найти высоту прямоугольника.

▶ Пусть x сантиметров — высота прямоугольника, тогда его основание равно $(x+10)$ сантиметров. Площадь этого прямоугольника равна $x(x+10)$ см^2. По условию задачи $x(x+10)=24$.

Раскрывая скобки и перенося число 24 с противоположным знаком в левую часть уравнения, получаем:

$$x^2+10x-24=0.$$

Разложим левую часть уравнения на множители способом группировки:

$$x^2+10x-24=x^2+12x-2x-24=$$
$$=x(x+12)-2(x+12)=(x+12)(x-2).$$

Следовательно, уравнение можно записать так:

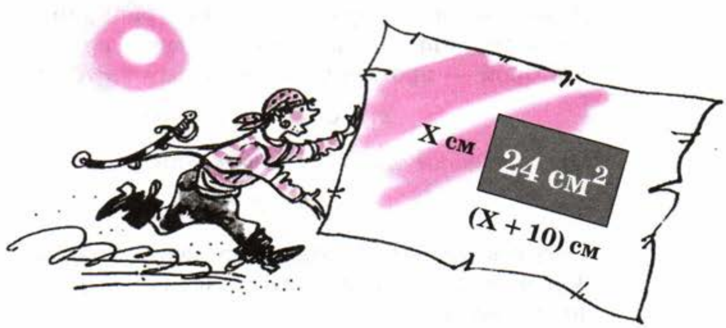
$$(x+12)(x-2)=0.$$

Это уравнение имеет корни $x_1=-12$, $x_2=2$. Так как длина отрезка не может быть отрицательным числом, то искомая высота равна 2 см. ◁

При решении этой задачи было получено уравнение

$$x^2+10x-24=0,$$

которое называют квадратным.



Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

где a, b, c — заданные числа, $a \neq 0$, x — неизвестное.

Коэффициенты a, b, c квадратного уравнения обычно называют так: a — *первым* или *старшим коэффициентом*, b — *вторым коэффициентом*, c — *свободным членом*.

Например, в уравнении $3x^2 - x + 2 = 0$ старший коэффициент 3, второй коэффициент -1, свободный член 2.

Решение многих задач математики, физики, техники сводится к решению квадратных уравнений.

Приведем еще примеры квадратных уравнений:

$$2x^2 + x - 1 = 0, \quad 5t^2 - 10t + 3 = 0,$$
$$x^2 - 25 = 0, \quad 2x^2 = 0.$$

При решении многих задач получаются уравнения, которые с помощью алгебраических преобразований сводятся к квадратным. Например, уравнение $2x^2 + 3x = x^2 + 2x + 2$ после перенесения всех его членов в левую часть и приведения подобных членов сводится к квадратному уравнению $x^2 + x - 2 = 0$.

Задача 2 Решить уравнение $x^2 = 64$.

▶ Перенесем 64 в левую часть, получим квадратное уравнение $x^2 - 64 = 0$.

Разложим левую часть на множители:

$$(x - 8)(x + 8) = 0.$$

Следовательно, уравнение имеет два корня: $x_1 = 8$, $x_2 = -8$. ◁

Заметим, что первый корень уравнения $x^2=64$ является арифметическим корнем из числа 64, а второй — противоположным ему числом:

$$x_1=\sqrt{64},\quad x_2=-\sqrt{64}.$$

Эти две формулы обычно объединяют в одну:

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{64}.$$

Ответ к задаче 2 можно записать так: $x_{1,2}=\pm 8$. Уравнение $x^2=64$ является частным случаем уравнения вида $x^2=d$.

Теорема. Уравнение $x^2=d$, где $d>0$, имеет два корня:

$$x_1=\sqrt{d},\quad x_2=-\sqrt{d}.$$

Перенесем d в левую часть уравнения:

$$x^2-d=0.$$

Так как $d>0$, то по определению арифметического квадратного корня $d=(\sqrt{d})^2$. Поэтому уравнение можно записать так:

$$x^2-(\sqrt{d})^2=0.$$

Разложим левую часть этого уравнения на множители, получим:

$$(x-\sqrt{d})(x+\sqrt{d})=0,$$

откуда $x_1=\sqrt{d}$, $x_2=-\sqrt{d}$.

Например, уравнение $x^2=\frac{4}{9}$ имеет корни $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{4}{9}}=\pm\frac{2}{3}$; уравнение $x^2=3$ имеет корни $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$; уравнение $x^2=8$ имеет корни $x_{1,2}=\pm\sqrt{8}=\pm 2\sqrt{2}$.

Если в уравнении $x^2=d$ правая часть равна нулю, то уравнение $x^2=0$ имеет один корень $x=0$. Так как уравнение $x^2=0$ можно записать в виде $x\cdot x=0$, то иногда говорят, что уравнение $x^2=0$ имеет два равных корня: $x_{1,2}=0$.

Если $d<0$, то уравнение $x^2=d$ не имеет действительных корней, так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным числом. Например, уравнение $x^2=-25$ не имеет действительных корней.

Упражнения

401 (Устно.) Какие из данных уравнений являются квадратными:

1) $5x^2 - 14x + 17 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0$;
3) $-7x^2 - 13x + 8 = 0$; 4) $17x + 24 = 0$;
5) $-13x^4 + 26 = 0$; 6) $x^2 - x = 0$?

402 (Устно.) Назвать коэффициенты и свободный член квадратного уравнения:

1) $5x^2 - 14x + 17 = 0$; 2) $\frac{2}{3}x^2 + 4 = 0$;
3) $-x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$; 4) $-7x^2 - 13x + 8 = 0$;
5) $x^2 + 25x = 0$; 6) $-x^2 - x = 0$.

403 Записать квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, если известны его коэффициенты:

1) $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$; 2) $a = -1,\ b = 0,\ c = 9$;
3) $a = 1,\ b = -5,\ c = 0$; 4) $a = 1,\ b = 0,\ c = 0$.

404 Привести данное уравнение к виду квадратного:

1) $x(x - 3) = 4$; 2) $(x - 3)(x - 1) = 12$;
3) $3x(x - 5) = x(x + 1) - x^2$; 4) $7(x^2 - 1) = 2(x + 2)(x - 2)$.

405 Какие из чисел $-3, -2, 0, -1, 1, 2, 3$ являются корнями уравнения:

1) $x^2 - 9 = 0$; 2) $x^2 + x - 6 = 0$; 3) $(x - 1)(x + 2) = 0$;
4) $x^2 - x = 0$; 5) $x^2 - 5x + 6 = 0$; 6) $(x + 1)(x - 3) = x$?

406 (Устно.) Сколько корней имеет уравнение $x^2 = 36$? Найти их. Какой из них является арифметическим корнем из 36?

407 (Устно.) Решить уравнение:

1) $x^2 = 1$; 2) $x^2 = 9$; 3) $x^2 = 16$;
4) $x^2 = 25$; 5) $x^2 = 100$; 6) $x^2 = 0$.

408 Найти корни уравнения:

1) $x^2 = \frac{9}{16}$; 2) $x^2 = \frac{16}{49}$; 3) $x^2 = 1\frac{7}{9}$;
4) $x^2 = 2\frac{1}{4}$; 5) $x^2 = 5$; 6) $x^2 = 13$.

409 Решить уравнение:

1) $x^2 - 49 = 0$; 2) $x^2 - 121 = 0$; 3) $\frac{1}{3}x^2 = 0$;
4) $\frac{x^2}{5} = 0$; 5) $x^2 + 9 = 0$; 6) $x^2 + 12 = 0$.

410 Решить квадратное уравнение, разложив его левую часть на множители:

1) $x^2 - x = 0$; 2) $x^2 + 2x = 0$; 3) $3x^2 + 5x = 0$;
4) $5x^2 - 3x = 0$; 5) $x^2 - 4x + 4 = 0$; 6) $x^2 + 6x + 9 = 0$.

411 Вычислить приближенно с помощью микрокалькулятора корни уравнения:

1) $x^2=7{,}12$; 2) $x^2=31$; 3) $x^2=0{,}4624$;
4) $x^2=675$; 5) $x^2-9735=0$; 6) $x^2-0{,}021=0$.

412 Решить уравнение:

1) $(x-2)(x^2+2x+4)-x^2(x-18)=0$;
2) $(x+1)(x^2-x+1)-x^2(x+4)=0$.

413 Показать, что уравнения $x^2=4$ и $|x|=2$ имеют одни и те же корни.

414 Найти такое положительное число b, чтобы левая часть уравнения оказалась квадратом суммы или разности, и решить полученное уравнение:

1) $x^2+bx+4=0$; 2) $x^2-bx+9=0$;
3) $x^2-8x+b=0$; 4) $x^2+\frac{2}{3}x+b=0$.

415 Решить уравнение:

1) $x^2+4x+3=0$; 2) $x^2+3x+2=0$.

416 Доказать, что если число x_0 — корень уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $c\neq0$, то число $\frac{1}{x_0}$ — корень уравнения $cx^2+bx+a=0$.

§ 26 Неполные квадратные уравнения

Квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ называют *неполным*, если хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю. Таким образом, неполное квадратное уравнение есть уравнение одного из следующих видов:

$$ax^2=0, \qquad (1)$$
$$ax^2+c=0,\ c\neq0, \qquad (2)$$
$$ax^2+bx=0,\ b\neq0. \qquad (3)$$

Заметим, что в уравнениях (1), (2), (3) коэффициент a не равен нулю.

Покажем, как решаются неполные квадратные уравнения.

Задача 1 Решить уравнение $5x^2 = 0$.

▶ Разделив обе части этого уравнения на 5, получим:

$$x^2 = 0,$$

откуда $x = 0$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $3x^2 - 27 = 0$.

▶ Разделим обе части уравнения на 3:

$$x^2 - 9 = 0.$$

Это уравнение можно записать так:

$$x^2 = 9,$$

откуда $x_{1,2} = \pm 3$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $2x^2 + 7 = 0$.

▶ Уравнение можно записать так:

$$x^2 = -\frac{7}{2}.$$

Это уравнение действительных корней не имеет, так как $x^2 \geqslant 0$ для любого действительного числа x. ◁

Задача 4 Решить уравнение $-3x^2 + 5x = 0$.

▶ Разложив левую часть уравнения на множители, получим:

$$x(-3x + 5) = 0,$$

откуда $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{3}$.

Ответ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{5}{3}$. ◁

Упражнения

Решить уравнение **(417—421)**.

417 1) $x^2 = 0$; 2) $3x^2 = 0$; 3) $5x^2 = 125$; 4) $9x^2 = 81$; 5) $4x^2 - 64 = 0$; 6) $x^2 - 27 = 0$; 7) $4x^2 = 81$; 8) $0{,}01x^2 = 4$.

418 1) $x^2 - 7x = 0$; 2) $x^2 + 5x = 0$; 3) $5x^2 = 3x$; 4) $4x^2 = 0{,}16x$; 5) $9x^2 - x = 0$; 6) $9x^2 + 1 = 0$.

419 1) $4x^2 - 169 = 0$; 2) $25 - 16x^2 = 0$; 3) $2x^2 - 16 = 0$; 4) $3x^2 = 15$; 5) $2x^2 = \frac{1}{8}$; 6) $3x^2 = 5\frac{1}{3}$.

420 1) $\frac{x^2 - 1}{3} = 5$; 2) $\frac{9 - x^2}{5} = 1$; 3) $4 = \frac{x^2 - 5}{5}$; 4) $3 = \frac{9x^2 - 4}{4}$.

421 1) $3x^2 + 6x = 8x^2 - 15x$; 2) $17x^2 - 5x = 14x^2 + 7x$; 3) $10x + 7x^2 = 2x^2 + 8x$; 4) $15x + 9x^2 = 7x^2 + 10x$.

422 При каких значениях x значения данных дробей равны:

1) $\frac{4x^2-3x}{3}$ и $\frac{x^2+5x}{2}$; 2) $\frac{3x^2+7x}{4}$ и $\frac{7x^2-5x}{3}$?

423 Решить уравнение:

1) $x(x-15)=3(108-5x)$;
2) $(x-7)(x+3)+(x-1)(x+5)=102$;
3) $(2x+1)(x-3)-(1-x)(x-5)=29-11x$;
4) $(3x-8)^2-(4x-6)^2+(5x-2)(5x+2)=96$.

424 Найти число, квадрат которого равен удвоенному этому числу. Сколько решений имеет задача?

425 Найти число, квадрат которого, уменьшенный на 4, равен нулю. Сколько решений имеет задача?

426 Площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi R^2$ (где S — площадь, R — радиус круга). На микрокалькуляторе вычислить с точностью до 0,1 м диаметр цирковой арены, если ее площадь составляет 2000 м^2.

427 Решить уравнение:

1) $\frac{x^2-9}{x-3}=0$; 2) $\frac{2x+x^2}{x+2}=0$.

§ 27 Метод выделения полного квадрата

Для решения квадратных уравнений применяется *метод выделения полного квадрата*. Поясним этот метод на примерах.

Задача 1 Решить квадратное уравнение

$$x^2+2x-3=0.$$

▶ Преобразуем это уравнение так:

$$x^2+2x=3,$$
$$x^2+2x+1=3+1,$$
$$(x+1)^2=4.$$

Следовательно, $x+1=2$ или $x+1=-2$, откуда $x_1=1$, $x_2=-3$. ◁

Решая уравнение $x^2+2x-3=0$, мы преобразовали его так, что в левой части получился квадрат двучлена $(x+1)^2$, а правая часть не содержит неизвестное.

Задача 2 Решить уравнение $x^2+6x-7=0$.

▶ Преобразуем это уравнение так, чтобы в левой части получился квадрат двучлена:

$$x^2+6x=7,$$
$$x^2+2\cdot 3x=7,$$
$$x^2+2\cdot 3x+3^2=7+3^2,$$
$$(x+3)^2=16.$$

Поясним эти преобразования. В выражении x^2+6x первое слагаемое — квадрат числа x, а второе — удвоенное произведение x и 3. Поэтому для получения в левой части уравнения квадрата двучлена нужно прибавить к обеим частям уравнения 3^2.

Решая уравнение $(x+3)^2=16$, получаем $x+3=4$ или $x+3=-4$, откуда $x_1=1$, $x_2=-7$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $4x^2-8x+3=0$.

▶
$$4x^2-8x=-3,$$
$$(2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x=-3,$$
$$(2x)^2-2\cdot 2\cdot 2x+4=-3+4,$$
$$(2x-2)^2=1,$$

$2x-2=1$ или $2x-2=-1$, $x_1=\frac{3}{2}$, $x_2=\frac{1}{2}$. ◁

Задача 4 Решить уравнение $x^2+5x-14=0$.

▶
$$x^2+5x=14,$$
$$x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}=14+\frac{25}{4},$$
$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{81}{4},$$
$$x+\frac{5}{2}=\pm\frac{9}{2},$$

$x_1=\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=2$, $x_2=-\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=-7$. ◁

Упражнения

428 Найти такое положительное число m, чтобы данное выражение было квадратом суммы или разности:

1) x^2+4x+m; 2) x^2-6x+m; 3) $x^2-14x+m$;
4) $x^2+16x+m$; 5) x^2+mx+4; 6) x^2-mx+9.

429 Методом выделения полного квадрата решить уравнение:

1) $x^2-4x-5=0$; 2) $x^2+4x-12=0$;

3) $x^2+2x-15=0$; 4) $x^2-10x+16=0$;

5) $x^2-6x+3=0$; 6) $x^2+8x-7=0$.

Решить уравнение **(430—432).**

430 1) $9x^2+6x-8=0$; 2) $25x^2-10x-3=0$.

431 1) $x^2-5x+4=0$; 2) $x^2-3x-10=0$.

432 1) $2x^2+3x-5=0$; 2) $5x^2-7x-6=0$.

§ 28 Решение квадратных уравнений

В предыдущем параграфе были рассмотрены решения квадратных уравнений методом выделения полного квадрата. Примéним этот метод для вывода формулы, по которой можно решать квадратное уравнение общего вида.

Рассмотрим квадратное уравнение общего вида:

$$ax^2+bx+c=0,$$

где $a\neq 0$.

Разделив обе части уравнения на a, получим:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Преобразуем это уравнение так, чтобы в левой части получился квадрат двучлена:

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a},$$

$$x^2+2\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}. \qquad (1)$$

Если $b^2 - 4ac \geqslant 0$, то $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2$, откуда

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

или

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}. \qquad (2)$$

Формулу (2) называют *формулой корней квадратного уравнения* общего вида.

Задача 1 Решить уравнение $6x^2 + x - 2 = 0$.

▶ Здесь $a = 6$, $b = 1$, $c = -2$. По формуле (2) находим:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6(-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12},$$

откуда $x_1 = \frac{-1+7}{12} = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{-1-7}{12} = -\frac{2}{3}$.

Ответ $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. ◁

Задача 2 Решить уравнение $4x^2 - 4x + 1 = 0$.

▶ Здесь $a = 4$, $b = -4$, $c = 1$. По формуле (2) находим:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

Ответ $x = \frac{1}{2}$. ◁

Если в равенстве (1) правая часть отрицательна, т. е. $b^2 - 4ac < 0$, то равенство (1) не может быть верным ни при каком действительном x, так как его левая часть неотрицательна.

Поэтому *уравнение* $ax^2 + bx + c = 0$ *не имеет действительных корней, если* $b^2 - 4ac < 0$.

Выражение $b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* и обозначают буквой D, т. е. $D = b^2 - 4ac$.

Задача 3 Доказать, что уравнение $x^2 - 4x + 5 = 0$ не имеет действительных корней.

▶ Здесь $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$,

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4 < 0.$$

Следовательно, данное уравнение не имеет действительных корней. ◁

Задача 4 Решить уравнение $2x^2+3x+4=0$.

► По формуле (2) имеем:

$$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot2\cdot4}}{4}.$$

Число, стоящее под знаком корня, отрицательно:

$$D=9-4\cdot2\cdot4=9-32<0.$$

Ответ Уравнение не имеет действительных корней. ◁

Неполные квадратные уравнения также можно решать по формуле (2), однако при их решении удобнее пользоваться приемами, рассмотренными в § 26.

Задача 5 Доказать, что корни квадратного уравнения

$$ax^2+2mx+c=0,$$

где $a\neq0$, $m^2-ac\geqslant0$, можно находить по формуле

$$\boldsymbol{x_{1,2}=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}}. \qquad (3)$$

► Здесь $b=2m$. По общей формуле корней квадратного уравнения (2) получаем:

$$x_{1,2}=\frac{-2m\pm\sqrt{4m^2-4ac}}{2a}=\frac{-2m\pm2\sqrt{m^2-ac}}{2a}=$$
$$=\frac{-m\pm\sqrt{m^2-ac}}{a}. \ ◁$$

Задача 6 Решить уравнение $3x^2-4x+1=0$.

► Здесь $b=-4=2\cdot(-2)$, т. е. $m=-2$.

По формуле (3) находим:

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{2\pm1}{3}$, откуда $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$.

Ответ $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. ◁

Упражнения

433 Найти значение выражения $\sqrt{b^2-4ac}$ при:

1) $a=3,\ b=1,\ c=-4$;
2) $a=3,\ b=-0{,}2,\ c=-0{,}01$;
3) $a=7,\ b=-6,\ c=-45$;
4) $a=-1,\ b=5,\ c=1800$.

434 Решить квадратное уравнение:

1) $2x^2+3x+1=0$;
2) $2x^2-3x+1=0$;
3) $2x^2+5x+2=0$;
4) $2x^2-7x+3=0$;
5) $3x^2+11x+6=0$;
6) $4x^2-11x+6=0$.

435 Найти все значения x, при которых значение выражения равно нулю:

1) $2x^2+5x-3$; 2) $2x^2-7x-4$;
3) $3x^2+x-4$; 4) $3x^2+2x-1$;
5) x^2+4x-3; 6) $3x^2+12x+10$;
7) $-2x^2+x+1$; 8) $-3x^2-x+4$.

Решить квадратное уравнение **(436—437).**

436 1) $9x^2-6x+1=0$; 2) $16x^2-8x+1=0$;
3) $49x^2+28x+4=0$; 4) $36x^2+12x+1=0$.

437 1) $2x^2+x+1=0$; 2) $3x^2-x+2=0$;
3) $5x^2+2x+3=0$; 4) $x^2-2x+10=0$.

438 Не решая уравнения, определить, сколько корней оно имеет:

1) $2x^2+5x-7=0$; 2) $3x^2-7x-8=0$;
3) $4x^2+4x+1=0$; 4) $9x^2-6x+2=0$.

Решить уравнение **(439—441).**

439 1) $7x^2-6x+2=0$; 2) $3x^2-5x+4=0$;
3) $9x^2+12x+4=0$; 4) $4x^2-20x+25=0$;
5) $4x^2+12x+9=0$; 6) $x^2-3x-4=0$.

440 1) $6x^2=5x+1$; 2) $5x^2+1=6x$;
3) $x(x-1)=72$; 4) $x(x+1)=56$;
5) $2x(x+2)=8x+3$; 6) $3x(x-2)-1=x-0{,}5(8+x^2)$.

441 1) $\dfrac{x^2+3x}{2}=\dfrac{x+7}{4}$;

2) $\dfrac{x^2-3x}{7}+x=11$;

3) $\dfrac{2x^2+x}{3}-\dfrac{2-3x}{4}=\dfrac{x^2-6}{6}$;

4) $\dfrac{x^2+x}{4}-\dfrac{3-7x}{20}=0{,}3$.

442 Найти все значения a, при которых уравнение $ax^2+3x+2=0$, где $a\neq 0$:

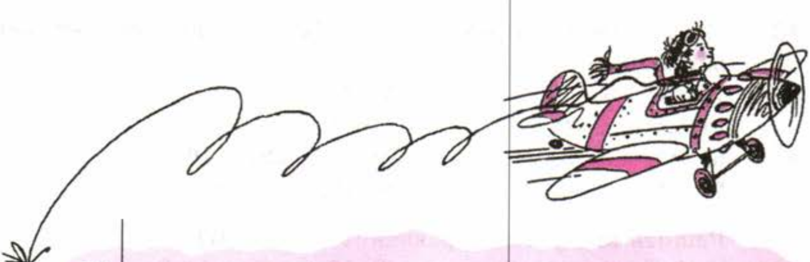
1) имеет два различных корня;
2) не имеет корней;
3) имеет один корень.

443 Найти все значения q, при которых уравнение $x^2-2x+q=0$:

1) имеет два различных корня;
2) имеет один корень.

444 Решить уравнение, используя формулу (3):

1) $5x^2-8x-4=0$; 2) $4x^2+4x-3=0$;
3) $8x^2-6x+1=0$; 4) $5x^2-26x+5=0$.



№ 5

КУБ, ДЛИНА РЕБРА КОТОРОГО 3 СМ, ПОКРАШЕН КРАСНОЙ КРАСКОЙ. ЕГО РАЗРЕЗАЛИ НА КУБИКИ ПО 1 СМ³. СКОЛЬКО КУБИКОВ ИМЕЮТ ТРИ КРАСНЫЕ ГРАНИ? ДВЕ КРАСНЫЕ ГРАНИ? ОДНУ КРАСНУЮ ГРАНЬ? НИ ОДНОЙ КРАСНОЙ ГРАНИ?

445 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $2{,}5x^2 - 30{,}75x + 93{,}8 = 0$;
2) $1{,}2x^2 + 5{,}76x + 6{,}324 = 0$;
3) $17x^2 - 918x - 125\,307 = 0$;
4) $13x^2 - 702x - 82\,251 = 0$.

446 Записать формулу корней квадратного уравнения $x^2 + 2mx + c = 0$, решить с помощью этой формулы уравнение:

1) $x^2 - 12x + 20 = 0$;
2) $x^2 + 10x + 24 = 0$;
3) $x^2 + 10x - 24 = 0$;
4) $x^2 - 50x + 49 = 0$.

447 С помощью микрокалькулятора найти приближенные значения корней уравнения с точностью до 0,01:

1) $1{,}3x^2 + 5{,}7x + 5{,}1 = 0$;
2) $2{,}3x^2 - 30{,}1x + 89 = 0$;
3) $x^2 + 19x - 68 = 0$;
4) $x^2 - 23x - 51 = 0$.

448 Доказать, что уравнение $x^2 + px - 1 = 0$ при любом p имеет два различных корня.

449 Доказать, что уравнение $ax^2 + bx - a = 0$ при $a \neq 0$ и любом b имеет два различных корня.

§ 29 Приведенное квадратное уравнение. Теорема Виета

Квадратное уравнение вида

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

называется *приведенным*.

В этом уравнении старший коэффициент равен единице. Например, уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$ является приведенным квадратным уравнением.

Всякое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ может быть приведено к виду (1) делением обеих частей уравнения на $a \neq 0$.

Например, уравнение $4x^2 + 4x - 3 = 0$ делением на 4 приводится к виду $x^2 + x - \frac{3}{4} = 0$.

Найдем корни приведенного квадратного уравнения (1). Для этого воспользуемся формулой корней квадратного уравнения общего вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

т. е. формулой

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Приведенное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

есть частный случай уравнения общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$, $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула (2) принимает вид:

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

или

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (3)$$

Формулу (3) называют *формулой корней приведенного квадратного уравнения*. Формулой (3) особенно удобно пользоваться, когда p — четное число.

Задача 1 Решить уравнение $x^2 - 14x - 15 = 0$.

▶ По формуле (3) находим:

$$x_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 15} = 7 \pm 8.$$

Ответ $x_1 = 15,\ x_2 = -1.$ ◁

Для приведенного квадратного уравнения справедлива следующая теорема:

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0,$$

то справедливы формулы

$$x_1 + x_2 = -p,$$
$$x_1 \cdot x_2 = q,$$

т. е. сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

● По формуле (3) имеем:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \qquad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Складывая эти равенства, получаем:

$$x_1 + x_2 = -p.$$

Перемножая эти равенства, по формуле разности квадратов получаем:

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = q. \ ○$$

Например, уравнение $x^2 - 13x + 30 = 0$ имеет корни $x_1 = 10,\ x_2 = 3$; сумма его корней $x_1 + x_2 = 13$, а их произведение $x_1 x_2 = 30$. Отметим, что теорема Виета справедлива и в случае, когда квадратное уравнение имеет два равных корня: $x_1 = x_2 = -\frac{p}{2}$.

Например, уравнение $x^2 - 6x + 9 = 0$ имеет равные корни: $x_1 = x_2 = 3$; их сумма $x_1 + x_2 = 6$, произведение $x_1 x_2 = 9$.

Задача 2 Один из корней уравнения $x^2+px-12=0$ равен $x_1=4$. Найти коэффициент p и второй корень x_2 этого уравнения.

▶ По теореме Виета

$$x_1 \cdot x_2 = -12, \quad x_1 + x_2 = -p.$$

Так как $x_1=4$, то $4x_2=-12$, откуда $x_2=-3$,

$$p = -(x_1 + x_2) = -(4-3) = -1.$$

Ответ $x_2=-3,\ p=-1.$ ◁

Задача 3 Составить приведенное квадратное уравнение, корни которого $x_1=3,\ x_2=4$.

▶ Так как $x_1=3,\ x_2=4$ — корни уравнения $x^2+px+ +q=0$, то по теореме Виета

$$p=-(x_1+x_2)=-7, \quad q=x_1x_2=12.$$

Ответ $x^2-7x+12=0.$ ◁

Задача 4 Один из корней уравнения $3x^2+8x-4=0$ положителен. Не решая уравнения, определить знак второго корня.

▶ Разделив обе части уравнения на 3, получим:

$$x^2+\frac{8}{3}x-\frac{4}{3}=0.$$

По теореме Виета $x_1x_2=-\frac{4}{3}<0$. По условию $x_1>0$, следовательно, $x_2<0$. ◁

При решении некоторых задач применяется следующая *теорема, обратная теореме Виета:*

Если числа $p,\ q,\ x_1,\ x_2$ таковы, что

$$\boldsymbol{x_1+x_2=-p, \quad x_1 \cdot x_2 = q,} \qquad (4)$$

то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

● Подставим в левую часть x^2+px+q вместо p выражение $-(x_1+x_2)$, а вместо q произведение $x_1 \cdot x_2$. Получим:

$$x^2+px+q=x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=$$
$$=x^2-x_1x-x_2x+x_1x_2=x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=$$
$$=(x-x_1)(x-x_2).$$

Таким образом, если числа $p,\ q,\ x_1$ и x_2 связаны соотношениями (4), то при всех x выполняется равенство $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$, из которого следует, что x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$. ○

С помощью теоремы, обратной теореме Виета, иногда можно *подбором* найти корни квадратного уравнения.

Задача 5 Подбором найти корни уравнения

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Здесь $p = -5$, $q = 6$. Подберем два числа x_1 и x_2 так, чтобы $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 x_2 = 6$.
Заметив, что $6 = 2 \cdot 3$, а $2 + 3 = 5$, по теореме, обратной теореме Виета, получаем, что $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ — корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Задача 6 Упростить дробь $\dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3}$.

Разложим числитель дроби на множители:

$$x^2 - x - 12 = x^2 - 4x + 3x - 12 =$$
$$= x(x-4) + 3(x-4) = (x-4)(x+3).$$

Следовательно,

$$\frac{x^2 - x - 12}{x + 3} = \frac{(x-4)(x+3)}{x+3} = x - 4.$$

Многочлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называют *квадратным трехчленом*. При решении задачи **5** квадратный трехчлен $x^2 - x - 12$ был разложен на множители способом группировки. Его можно было также разложить на множители, используя следующую теорему:

Теорема. Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то при всех x справедливо равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \qquad (5)$$

Преобразуем выражение, стоящее в правой части равенства (5):

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 - ax \cdot x_1 - ax \cdot x_2 + ax_1 x_2 =$$
$$= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1 x_2. \qquad (6)$$

Так как x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, т. е. уравнения $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, то по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a},$$

откуда $a(x_1 + x_2) = -b$, $ax_1 x_2 = c$.
Подставляя эти выражения в равенство (6) получаем формулу (5).

Задача 7 Упростить выражение $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}$.

▶ Разложим числитель и знаменатель дроби на множители.

1) Уравнение $2x^2+5x-3=0$ имеет корни

$$x_1=\frac{1}{2},\ x_2=-3.$$

По доказанной теореме

$$2x^2+5x-3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+3)=(2x-1)(x+3).$$

2) Уравнение $x^2-x-12=0$ имеет корни $x_1=-3$, $x_2=4$. По доказанной теореме

$$x^2-x-12=(x+3)(x-4).$$

Таким образом,

$$\frac{2x^2+5x-3}{x^2-x-12}=\frac{(2x-1)(x+3)}{(x+3)(x-4)}=\frac{2x-1}{x-4}.$$ ◁

Упражнения

450 Решить приведенное квадратное уравнение:
1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2-6x-7=0$;
3) $x^2-8x-9=0$; 4) $x^2+6x-40=0$;
5) $x^2+x-6=0$; 6) $x^2-x-2=0$.

451 (Устно.) Найти сумму и произведение корней приведенного квадратного уравнения, имеющего корни:
1) $x^2-x-2=0$; 2) $x^2-5x-6=0$;
3) $x^2+3x+2=0$ 4) $x^2+3x-4=0$;
5) $x^2-7x+5=0$; 6) $x^2+9x-6=0$.

452 (Устно.) Один из корней уравнения $x^2-19x+18=0$ равен 1. Найти его второй корень.

453 (Устно.) Один из корней уравнения $28x^2+23x-5=0$ равен -1. Найти его второй корень.

454 (Устно.) Не решая уравнения, имеющего корни, определить знаки его корней:
1) $x^2+4x-5=0$; 2) $x^2+5x+3=0$;
3) $x^2-5x+3=0$; 4) $x^2-8x-7=0$.

455 Записать приведенное квадратное уравнение, имеющее корни x_1 и x_2:
1) $x_1=3,\ x_2=-1$; 2) $x_1=2,\ x_2=3$;
3) $x_1=-4,\ x_2=-5$; 4) $x_1=-3,\ x_2=6$.

456 Подбором найти корни уравнения:
1) $x^2+5x+6=0$; 2) $x^2-7x+12=0$; 3) $x^2-6x+5=0$;
4) $x^2+8x+7=0$; 5) $x^2-8x+15=0$; 6) $x^2+2x-15=0$.

457 Квадратный трехчлен разложить на множители:

1) x^2-5x+6; 2) x^2+4x-5;
3) $x^2+5x-24$; 4) x^2+x-42;
5) $2x^2-x-1$; 6) $8x^2+10x+3$;
7) $-6x^2+7x-2$; 8) $-4x^2-7x+2$.

458 Сократить дробь:

1) $\frac{x^2+x-2}{x-1}$; 2) $\frac{x^2+4x-12}{x-2}$; 3) $\frac{x+3}{x^2-6x-27}$;

4) $\frac{x-8}{x^2-x-56}$; 5) $\frac{2x^2-3x-2}{4x^2-1}$; 6) $\frac{3x^2+8x-3}{9x^2-1}$.

459 Решить приведенное квадратное уравнение:

1) $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$; 2) $x^2-2\sqrt{5}x+1=0$;
3) $x^2+\sqrt{2}x-4=0$; 4) $x^2-4\sqrt{7}x+4=0$.

460 Разложить на множители:

1) x^3-3x^2+2x; 2) x^3+4x^2-21x;
3) x^3+5x^2-24x; 4) x^3-9x^2-22x.

461 Сократить дробь:

1) $\frac{x^2+6x-7}{x^2-7x+6}$; 2) $\frac{x^2-8x-9}{x^2+9x+8}$;

3) $\frac{x^2-8x+15}{-x^2+5x-6}$; 4) $\frac{36+5x-x^2}{x^2-x-20}$.

462 Упростить:

1) $\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{1}{x-3}$; 2) $\frac{3}{x^2+6x+9}-\frac{1}{x+3}$;

3) $\frac{7}{5x^2+3x-2}-\frac{5}{5x-2}$; 4) $\frac{5x+1}{x^2+9x-10}:\frac{5x^2+x}{x^2-2x+1}$.

463 Пусть уравнение $x^2+px+q=0$ имеет два действительных корня x_1 и x_2. Записать приведенное квадратное уравнение, имеющее корни $-x_1$ и $-x_2$.

464 Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2+6x+q=0$ удовлетворяют условию $x_2=2x_1$. Найти q, x_1, x_2.

465 Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2+px+3=0$ удовлетворяют условию $x_2=3x_1$. Найти p, x_1, x_2.

466 Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $3x^2-8x-15=0$, найти:

1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 2) $x_1^2+x_2^2$; 3) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 4) $x_1^3+x_2^3$.

467 С помощью микрокалькулятора найти корни уравнения; по теореме Виета выяснить, являются найденные значения точными или приближенными значениями корней уравнения:

1) $x^2+2x-1=0$; 2) $x^2-2x-2=0$;
3) $x^2+1,8x-28,35=0$; 4) $x^2-39x-1026=0$.

§ 30 Уравнения, сводящиеся к квадратным

Задача 1 Решить уравнение $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

▶ Обозначим $x^2 = t$, тогда уравнение примет вид:

$$t^2 - 7t + 12 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, получаем:

$$t_1 = 4, \ t_2 = 3.$$

Так как $t = x^2$, то решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений:

$$x^2 = 4, \ x^2 = 3,$$

откуда

$$x_{1,2} = \pm 2, \ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}.$$

Ответ $x_{1,2} = \pm 2, \ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$. ◁

Уравнение

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

где $a \neq 0$, называют *биквадратным*.

Заменой $x^2 = t$ это уравнение сводится к квадратному.

Задача 2 Решить биквадратное уравнение

$$9x^4 + 5x^2 - 4 = 0.$$

▶ Обозначим $x^2 = t$. Тогда данное уравнение примет вид:

$$9t^2 + 5t - 4 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим:

$$t_1 = \frac{4}{9}, \ t_2 = -1.$$

Уравнение $x^2 = \frac{4}{9}$ имеет корни $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$, а уравнение $x^2 = -1$ не имеет действительных корней.

Ответ $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$. ◁

Задача 3 Решить уравнение $\frac{3}{x+2} - \frac{4}{x-3} = 3$.

Общий знаменатель дробей, входящих в уравнение, равен $(x+2)(x-3)$. Если $x+2 \neq 0$ и $x-3 \neq 0$, то, умножая обе части уравнения на $(x+2)(x-3)$, получаем:

$$3(x-3) - 4(x+2) = 3(x+2)(x-3).$$

Преобразуем это уравнение:

$$3x - 9 - 4x - 8 = 3(x^2 - x - 6),$$
$$-x - 17 = 3x^2 - 3x - 18,$$
$$3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим его корни: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$.

Так как при $x = 1$ и $x = -\frac{1}{3}$ знаменатели дробей исходного уравнения не обращаются в нуль, то числа 1 и $-\frac{1}{3}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$. ◁

Задача 4 Решить уравнение

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} + \frac{3}{x-1} = \frac{3-x}{x-2}. \qquad (1)$$

По условию $(x-1)(x-2) \neq 0$. Умножая обе части уравнения на $(x-1)(x-2)$, получаем:

$$1 + 3(x-2) = (3-x)(x-1).$$

Преобразуем это уравнение:

$$1 + 3x - 6 = -x^2 + 4x - 3,$$
$$x^2 - x - 2 = 0. \qquad (2)$$

Решая полученное квадратное уравнение, находим его корни:

$$x_1 = -1, \ x_2 = 2.$$

При $x = -1$ знаменатели исходного уравнения не обращаются в нуль, следовательно, число -1 — корень исходного уравнения. При $x = 2$ знаменатели двух дробей исходного уравнения равны нулю, поэтому число 2 не является корнем исходного уравнения.

Ответ $x = -1$. ◁

В задаче **4** исходное уравнение (1) было сведено к квадратному уравнению (2), имеющему два корня. Один из них $x_1 = -1$ является корнем уравнения (1). Другой корень $x_2 = 2$ не является корнем уравнения (1), в этом случае его называют *посторонним корнем*.

Таким образом, при умножении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут появиться посторонние корни. Поэтому *при решении уравнения, содержащего неизвестное в знаменателе дроби, необходима проверка*.

Задача 5 Решить уравнение

$$\frac{x+7}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x^2+7x+12} = 0.$$

▶ Разложим квадратный трехчлен $x^2+7x+12$ на множители. Решая уравнение $x^2+7x+12=0$, находим его корни $x_1=-3$, $x_2=-4$. Поэтому $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$. Умножим обе части данного уравнения на общий знаменатель дробей, т. е. на $(x+3)(x+4)$. Получим:

$$(x+7)(x+3)-(x+4)+1=0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$x^2+10x+21-x-4+1=0,$$
$$x^2+9x+18=0.$$

Решая это уравнение, находим его корни:

$$x_1=-3,\ x_2=-6.$$

Проверим эти корни. При $x=-3$ знаменатели второй и третьей дробей исходного уравнения обращаются в нуль, поэтому $x_1=-3$ — посторонний корень. При $x=-6$ знаменатели дробей исходного уравнения не равны нулю. Подстановкой $x=-6$ в исходное уравнение можно убедиться, что это число является корнем уравнения.

Ответ $x=-6$. ◁

Упражнения

Решить уравнение **(468—471)**.

468 1) $x^4-10x^2+9=0$; 2) $x^4-5x^2+4=0$;
3) $x^4-13x^2+36=0$; 4) $x^4-50x^2+49=0$.

469 1) $x^4-3x^2-4=0$; 2) $x^4+3x^2-4=0$;
3) $x^4+x^2-20=0$; 4) $x^4-4x^2-5=0$.

470 1) $\frac{10}{x-3}-\frac{8}{x}=1;$ 2) $\frac{2}{x-5}+\frac{14}{x}=3;$

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}=\frac{3}{20};$ 4) $\frac{40}{x-20}-\frac{40}{x}=1;$

5) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}=\frac{5}{8};$ 6) $\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x+2}=1{,}5.$

471 1) $\frac{3x+4}{x-6}=\frac{x-2}{4x+3};$ 2) $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{13}{6};$

3) $\frac{x+5}{x+2}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1};$ 4) $\frac{x^2-2x-5}{(x-3)(x-1)}+\frac{1}{x-3}=1;$

5) $\frac{x^2}{x+3}-\frac{x}{-3-x}=\frac{6}{x+3};$ 6) $\frac{x^2}{x-1}-\frac{2x}{1-x}=\frac{3}{x-1}.$

472 Имеет ли действительные корни уравнение:

1) $x^4-5x^2+7=0;$ 2) $x^4+3x^2+2=0$?

473 При каких значениях x равны значения выражений:

1) $\frac{6}{x^2-1}+\frac{2}{1-x}$ и $2-\frac{x+4}{x+1}$; 2) $\frac{1}{x+2}-\frac{3}{x-2}$ и $\frac{4}{4-x^2}+1$?

474 Решить уравнение:

1) $(x-1)^4-5(x-1)^2+4=0;$ 2) $(x+5)^4+8(x+5)^2-9=0.$

475 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $x^4+3x^2-7=0;$ 2) $x^4+5x^2-5=0;$

3) $6x^4+19x^2-47=0;$ 4) $5x^4+18x^2-111=0.$

§ 31 Решение задач с помощью квадратных уравнений

Решим несколько задач с помощью квадратных уравнений.

Задача 1 В шахту брошен камень, и звук от его удара был услышан спустя 9 с. Определить глубину шахты, считая скорость звука равной 320 м/с, а ускорение силы тяжести g равным 10 м/с^2.

▶ Для нахождения глубины шахты достаточно определить время t падения камня, так как глубина шахты согласно закону свободного падения равна $\frac{gt^2}{2}$ метрам.

По условию $g = 10$ м/с^2, поэтому глубина шахты равна $5t^2$ метрам. С другой стороны, глубину шахты можно найти, умножив скорость звука 320 м/с на время его распространения от момента удара камня до момента, когда был услышан звук, т. е. на $(9 - t)$ секунд. Следовательно, глубина шахты равна $320(9 - t)$ метрам. Приравнивая два найденных выражения для глубины шахты, получаем уравнение $5t^2 = 320(9 - t)$. Решим это уравнение:

$$t^2 = 64(9 - t), \quad t^2 + 64t - 64 \cdot 9 = 0.$$

Решим полученное квадратное уравнение:

$$t_{1,2} = -32 \pm \sqrt{32^2 + 64 \cdot 9} = -32 \pm \sqrt{32(32 + 18)} =$$
$$= -32 \pm \sqrt{32 \cdot 50} = -32 \pm \sqrt{16 \cdot 100} = -32 \pm 40,$$
$$t_1 = 8, \quad t_2 = -72.$$

Так как время падения камня положительно, то $t = 8$ с. Следовательно, глубина шахты равна

$$5t^2 = 5 \cdot 8^2 = 320 \text{ (м)}.$$

Ответ 320 м. ◁

Задача 2 Автобус-экспресс отправился от автовокзала в аэропорт, находящийся на расстоянии 40 км. Через 10 мин вслед за автобусом выехал пассажир на такси. Скорость такси на 20 км/ч больше скорости автобуса. Найти скорость такси и автобуса, если в аэропорт они прибыли одновременно.

▶ Пусть x километров в час — скорость автобуса, тогда скорость такси равна $(x + 20)$ километров в час. Время движения автобуса равно $\frac{40}{x}$ часам, а время движения такси равно $\frac{40}{x + 20}$ часам. По условию задачи разница между временем движения автобуса и такси равна 10 мин, т. е. $\frac{1}{6}$ ч. Следовательно,

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x + 20} = \frac{1}{6}. \qquad (1)$$

Решим полученное уравнение. Умножая обе части уравнения на $6x(x + 20)$, получаем:

$$40 \cdot 6 \cdot (x + 20) - 40 \cdot 6x = x(x + 20),$$
$$240x + 4800 - 240x = x^2 + 20x,$$
$$x^2 + 20x - 4800 = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_1 = 60$, $x_2 = -80$.
При этих значениях x знаменатели дробей, входящих в уравнение (1), не равны нулю, поэтому $x_1 = 60$ и $x_2 = -80$ являются корнями уравнения (1). Так как скорость автобуса положительна, то условию задачи удовлетворяет только один корень: $x = 60$. Поэтому скорость такси 80 км/ч.

Ответ Скорость автобуса 60 км/ч, скорость такси 80 км/ч. ◁

Задача 3 На перепечатку рукописи первая машинистка, работая одна, потратила бы на 3 ч меньше, чем вторая. Работая одновременно, они закончили перепечатку всей рукописи за 6 ч 40 мин. Сколько времени потребовалось бы каждой из них на перепечатку всей рукописи?

▶ Примем работу по перепечатке всей рукописи за единицу. Пусть первая машинистка затратит на перепечатку рукописи x часов, тогда второй на эту работу потребуется $(x+3)$ часов. Первая машинистка за час выполняет $\frac{1}{x}$ часть работы, а вторая $\frac{1}{x+3}$. Работая вместе, они выполняют за час $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}$ всей работы, а за 6 ч 40 мин, т. е. за $6\frac{2}{3}$ ч, они выполняют всю работу. Поэтому

$$6\frac{2}{3}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3}\right) = 1.$$

Это уравнение можно записать так:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{3}{20}. \qquad (2)$$

Умножая обе его части на $20x(x+3)$, получаем:

$$20(x+3) + 20x = 3x(x+3),$$
$$40x + 60 = 3x^2 + 9x,$$
$$3x^2 - 31x - 60 = 0.$$

Корни этого уравнения:

$$x_1 = 12, \quad x_2 = -\frac{5}{3}.$$

При этих значениях x знаменатели дробей, входящих в уравнение (2), не равны нулю, поэтому $x_1 = 12$ и $x_2 = -\frac{5}{3}$ — корни уравнения (2). Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 12$. Следовательно, первая машинистка затрачивает на работу 12 ч, вторая 12 ч + 3 ч = 15 ч.

Ответ 12 ч и 15 ч. ◁

Упражнения

476 Найти два последовательных натуральных числа, произведение которых равно: 1) 156; 2) 210.

477 Найти два последовательных нечетных натуральных числа, если их произведение равно: 1) 255; 2) 399.

478 Периметр прямоугольника равен 1 м, а площадь — 4 дм^2. Найти его стороны.

479 Сад совхоза площадью 2,45 га обнесен изгородью длиной 630 м. Найти длину и ширину сада, если он имеет прямоугольную форму.

480 Расстояние в 400 км скорый поезд прошел на час быстрее товарного. Какова скорость каждого поезда, если скорость товарного поезда на 20 км/ч меньше, чем скорого?

481 Прогулочный теплоход отправился вниз по течению реки от пристани A и причалил к пристани B. После получасовой стоянки теплоход отправился обратно и через 8 ч после отплытия из A вернулся на эту же пристань. Какова скорость теплохода в стоячей воде, если расстояние между пристанями A и B равно 36 км, а скорость течения реки 2 км/ч?

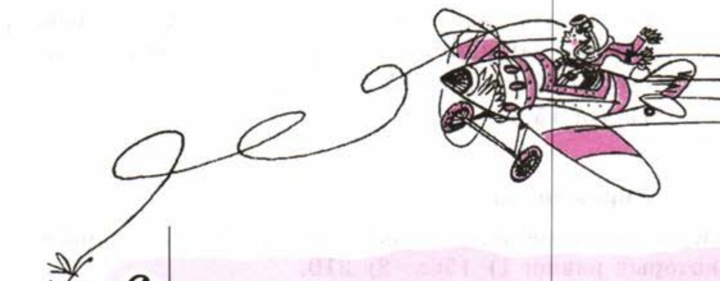
482 Две бригады, работая вместе, закончили заготовку леса за 6 дней. Сколько дней потребовалось бы каждой бригаде на выполнение этой работы, если одной из бригад для этого требуется на 5 дней меньше, чем другой?

483 От квадратного листа отрезали полоску шириной 6 см. Площадь оставшейся части равна 135 см^2. Определить первоначальные размеры листа.

484 Площадь прямоугольного треугольника равна 180 см^2. Найти катеты этого треугольника, если один больше другого на 31 см.

485 Расстояние в 30 км один из двух лыжников прошел на 20 мин быстрее другого. Скорость первого лыжника была на 3 км/ч больше скорости второго. Какова скорость каждого лыжника?

486 Две бригады студенческого строительного отряда, работая вместе, построили кошару для овец за 12 дней. Сколько дней потребовалось бы на строительство такой же кошары каждой бригаде отдельно, если первой бригаде нужно было работать на 10 дней больше, чем второй?



№ 6

У МАЛЬЧИКА СТОЛЬКО СЕСТЕР, СКОЛЬКО И БРАТЬЕВ, А У ЕГО СЕСТРЫ ВДВОЕ МЕНЬШЕ СЕСТЕР, ЧЕМ БРАТЬЕВ. СКОЛЬКО БРАТЬЕВ И СЕСТЕР В ЭТОЙ СЕМЬЕ?

487 Члены школьного кружка натуралистов отправились на катере для сбора лекарственных трав. Проплыв вниз по течению реки 35 км, они сделали трехчасовую стоянку, после чего вернулись назад. Определить скорость катера в стоячей воде, если на все путешествие ушло 7 ч, а скорость течения реки 3 км/ч.

488 На середине пути между станциями A и B поезд был задержан на 10 мин. Чтобы прибыть в B по расписанию, машинисту пришлось первоначальную скорость поезда увеличить на 12 км/ч. Найти первоначальную скорость поезда, если известно, что расстояние между станциями равно 120 км.

489 За 4 дня совместной работы двух тракторов различной мощности было вспахано $\frac{2}{3}$ колхозного поля. За сколько дней можно было бы вспахать все поле каждым трактором отдельно, если первым трактором можно вспахать все поле на 5 дней быстрее, чем вторым?

490 Рабочий положил на хранение в сберегательный банк 5000 р. По истечении года к его вкладу были причислены процентные деньги, и в то же время он увеличил свой вклад еще на 5000 р., а по истечении еще одного года попросил выдать ему накопленные процентные деньги. Сколько процентов в год начисляет сбербанк, если рабочий получил 1232 р. процентных денег, оставив вклад в 10 000 р. на новый срок?

491 Два раствора, из которых первый содержит 0,8 кг, а второй — 0,6 кг безводной серной кислоты, соединили вместе и получили 10 кг нового раствора серной кислоты. Найти массу первого и второго растворов в смеси, если известно, что безводной серной кислоты в первом растворе было на 10% больше, чем во втором.

§ 32 Решение простейших систем, содержащих уравнение второй степени

Задача 1 Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 13 см, а его площадь 30 см^2. Найти катеты.

▶ Пусть катеты равны x и y сантиметрам. Используя теорему Пифагора и формулу площади прямоугольного треугольника, условие задачи запишем так:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169, \\ \frac{1}{2}xy = 30. \end{cases} \qquad (1)$$

Прибавляя к первому уравнению системы второе, умноженное на 4, получаем:

$$x^2 + y^2 + 2xy = 289,$$

откуда $(x+y)^2 = 289$, или $x + y = \pm 17$. Так как x и y — положительные числа, то $x + y = 17$. Из этого уравнения выразим y через x и подставим в одно из уравнений системы (1), например во второе: $y = 17 - x$, $\frac{1}{2}x(17 - x) = 30$. Решим полученное уравнение: $17x - x^2 = 60$, $x^2 - 17x + 60 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 12$. Подставляя эти значения в формулу $y = 17 - x$, находим $y_1 = 12$, $y_2 = 5$. В обоих случаях один из катетов равен 5 см, другой 12 см.

Ответ 5 см, 12 см. ◁

Задача 2 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = -10. \end{cases}$$

▶ По теореме, обратной теореме Виета, числа x и y являются корнями квадратного уравнения $z^2 - 3z - 10 = 0$. Решая это уравнение, получаем $z_1 = 5$, $z_2 = -2$. Следовательно, решениями системы являются следующие две пары чисел: $x_1 = 5$, $y_1 = -2$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 5$.

Ответ (5; −2), (−2; 5). ◁

Задача 3 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 2y^2 = -29, \\ 3x - y - 6 = 0. \end{cases}$$

▶ Решим эту систему способом подстановки: $y = 3x - 6$,

$$x^2 + 4x(3x - 6) - 2(3x - 6)^2 = -29.$$

Упростив это уравнение, получим $5x^2 - 48x + 43 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 8{,}6$. Подставляя значения x в формулу $y = 3x - 6$, находим $y_1 = -3$, $y_2 = 19{,}8$.

Ответ (1; −3), (8,6; 19,8). ◁

Задача 4 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

▶ Запишем первое уравнение системы так:

$$(x - y)(x + y) = 16.$$

Подставляя сюда значение $x - y = 2$ из второго уравнения системы, получаем $x + y = 8$. Итак,

$$\begin{cases} x + y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решая эту систему способом сложения, находим $x = 5$, $y = 3$.

Ответ (5; 3). ◁

Упражнения

492 Решить систему уравнений первой степени с двумя неизвестными:

1) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 2y + x = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 5y = 9, \\ 3y - 2x = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + y + 4 = 0, \\ 4y + 8x - 4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 3y + 8 = 0, \\ 4x - 2y + 4 = 0. \end{cases}$

Решить систему уравнений **(493—497)**.

493 1) $\begin{cases} y = x + 6, \\ x^2 - 4y = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2 - y, \\ y^2 + x = 32; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x + y^2 = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x = 2, \\ x^2 - 2y = 3. \end{cases}$

494 1) $\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y - 3x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - xy - y^2 = 19, \\ x - y = 7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x - y = 3. \end{cases}$

495 1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 7, \\ x + y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 12, \\ xy = 11; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -7, \\ xy = 10. \end{cases}$

496 1) $\begin{cases} x - y = 7, \\ x^2 - y^2 = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 24, \\ x + y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$

497 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ xy = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} xy = 10, \\ x^2 + y^2 = 29; \end{cases}$

3) $\begin{cases} xy = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$

498 Сумма двух чисел равна 18, а их произведение 65. Найти эти числа.

499 Среднее арифметическое двух чисел равно 20, а их среднее геометрическое 12. Найти эти числа.

500 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x = 2y - 3, \\ y^2 - 2x = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 21, \\ x + y = 7. \end{cases}$

Решить систему уравнений **(501–503)**.

501 1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 3, \\ xy = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 46, \\ xy = 10. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x - y)^2 = 4, \\ x + y = 6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 4 + xy = 0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x + y = 4, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1. \end{cases}$

502 1) $\begin{cases} x + xy + y = -1, \\ x - xy + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - xy - y = -7, \\ x + xy - y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y + 2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = 11, \\ xy = 5. \end{cases}$

503 1) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8, \\ x - y = 16; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$

504 Участок прямоугольной формы нужно огородить забором длиной 1 км. Каковы должны быть длина и ширина участка, если его площадь равна 6 га?

505 При делении двузначного числа на сумму его цифр в частном получается 6, а в остатке 4. При делении этого же числа на произведение его цифр в частном получается 2, а в остатке 16. Найти это число.

506 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x^3 + y^3 = 35; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 152, \\ x^2 - xy + y^2 = 19. \end{cases}$

507 Расстояние от A до B по течению реки катер проходит в 1,5 раза медленнее, чем теплоход, причем за каждый час катер отстает от теплохода на 8 км. Против течения реки путь от B до A теплоход проходит в 2 раза быстрее катера. Найти скорости теплохода и катера в стоячей воде.

§ 33* Комплексные числа

Решение многих задач математики, физики и практики сводится к решению алгебраических уравнений. Поэтому естественно стремление сделать эти уравнения всегда разрешимыми, что в свою очередь приводит к расширению понятия числа. Например, для того чтобы любое уравнение $x + a = b$ имело корни, положительных чисел недостаточно и поэтому возникает потребность ввести отрицательные числа и нуль.

Вы знаете, что квадратное уравнение может не иметь действительных корней. Простейшим из таких уравнений является уравнение $x^2 + 1 = 0$. Чтобы любое квадратное уравнение имело корни, приходится *расширять множество действительных чисел*, добавляя к нему новые числа. Эти новые числа вместе с действительными образуют множество, которое называют *множеством комплексных чисел*.

Если комплексные числа введены, то уравнение $x^2 + 1 = 0$ имеет корень. Этот корень обозначают буквой i и называют *мнимой единицей*. Таким образом, i — это такое комплексное число, что

$$i^2 = -1.$$

Замечательным оказывается тот факт, что любое комплексное число можно записать в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа. От вида этого выражения и происходит название «комплексное», т. е. «составное».

Комплексными числами называют выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, $i^2 = -1$.

Число a называется *действительной частью* комплексного числа $a + bi$, а число b — его *мнимой частью*.

Например, действительная часть комплексного числа $2 + 3i$ равна 2, а мнимая часть равна 3; для комплексного числа $(-2) + (-3)i$, которое записывают также в виде $-2-3i$, действительная часть равна -2, а мнимая часть равна -3.

Заметим, что *действительные числа являются частными случаями комплексных чисел*. Например, $2+0\cdot i=2$, $0+0\cdot i=0$, $-4+0\cdot i=-4$.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ называют *равными*, если $a=c$ и $b=d$, т. е. если равны их действительные и мнимые части.

Например, $\frac{4}{6}+\sqrt{4}i=\frac{2}{3}+2i$, так как $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ и $\sqrt{4}=2$.

Задача 1 Найти действительные числа x и y, если

$$(2x+y)+(x-y)i=5-2i.$$

▶ По определению равенства комплексных чисел

$$\begin{cases} 2x+y=5, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x=1$, $y=3$. ◁

Арифметические действия над комплексными числами определяются так, чтобы все свойства этих действий были такими же, как и для действительных чисел (переместительное и сочетательное свойства сложения и умножения, распределительное свойство умножения и др.). Поэтому действия над комплексными числами $a+bi$ можно выполнять так же, как и действия над многочленами, считая, что $i^2=-1$.

Задача 2 Выполнить действия:

1) $(4-3i)+(-2+7i)$; 2) $(8-5i)-(9-4i)$;

3) $(2+i)\cdot(1-3i)$; 4) $\frac{5-14i}{2-3i}$.

▶ 1) $(4-3i)+(-2+7i)=4-3i-2+7i=2+4i$;

2) $(8-5i)-(9-4i)=8-5i-9+4i=-1-i$;

3) $(2+i)\cdot(1-3i)=2-6i+i-3i^2=2-5i-$
$-3\cdot(-1)=5-5i$;

4) $\frac{5-14i}{2-3i}=\frac{(5-14i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}=\frac{10+15i-28i-42i^2}{4-3^2i^2}=$
$=\frac{52-13i}{13}=\frac{52}{13}-\frac{13i}{13}=4-i$. ◁

В последнем примере для вычисления частного сначала числитель и знаменатель дроби умножили на число $2+3i$. Всегда для вычисления дроби

$\dfrac{c+di}{a+bi}$ нужно сначала умножить числитель и знаменатель на *число* $a-bi$, которое *называют сопряженным с числом* $a+bi$. Это объясняется тем, что произведение сопряженных чисел является действительным числом: $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$.

Упражнения

508 (Устно.) Назвать действительную и мнимую части комплексного числа:

1) $6+5i$; 2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}i$; 3) $\sqrt{2}+\sqrt{3}i$; 4) $\sqrt[3]{2}-2i$.

509 Записать комплексное число, у которого действительная и мнимая части соответственно равны:

1) 3 и 4; 2) $\frac{1}{3}$ и $\frac{3}{4}$; 3) $\sqrt{3}$ и -2; 4) $-\frac{2}{7}$ и -3.

510 Указать, какие из данных комплексных чисел равны:

$-0{,}5+\sqrt{4}i$, $3-2i$, $-\frac{1}{2}+2i$, $\sqrt{9}-4i$, $\sqrt{9}-\sqrt[3]{8}i$, $\sqrt[3]{27}-\sqrt{16}i$, $\sqrt[3]{27}-\sqrt{4}i$.

511 Найти действительные числа x и y из равенства:

1) $(x+y)+(x-y)i=8+2i$;
2) $(2x+y)+(x-y)i=18+3i$;
3) $(4x+3y)+(2x-y)i=3-11i$;
4) $(6x+y)+(2y-7x)i=12+5i$.

512 Найти сумму комплексных чисел:

1) $(3+i)+(2+3i)$; 2) $(3-5i)+(2+i)$;
3) $(1+3i)+(-3+i)$; 4) $(-4+3i)+(4-3i)$;
5) $(1+i)+(-1-i)$; 6) $\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}i\right)$.

513 Найти разность комплексных чисел:

1) $(2+3i)-(3+i)$; 2) $(3-5i)-(2+i)$;
3) $(1+3i)-(-3+i)$; 4) $(4+3i)-(4-3i)$;
5) $(4+i)-(-5+i)$; 6) $(7+2i)-(3+2i)$.

514 Найти произведение комплексных чисел:

1) $(3+5i)(2+3i)$; 2) $(4+7i)(2-i)$;
3) $(5-3i)(2-5i)$; 4) $(-2+i)(7-3i)$.

515 Записать комплексное число, сопряженное с данным числом:

1) $1+i$; 2) $2+3i$; 3) $-3+4i$;
4) $-7-5i$; 5) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$; 6) $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i$.

516 Найти частное двух комплексных чисел:

1) $\dfrac{1+i}{1-i}$; 2) $\dfrac{3-4i}{2+i}$; 3) $\dfrac{2+3i}{2-3i}$; 4) $\dfrac{1+2i}{3-2i}$.

517 Выполнить действия:

1) $2i+3+4i(1-i)$; 2) $(1+i)(-1+2i)+1-3i$;

3) $3i(1-i)+2i(1+i)$; 4) $\frac{1}{2}i(4+2i)+\frac{1}{3}i(3-9i)$;

5) $(3-2i)(4+i)+10i$; 6) $6+(5-i)(1+i)$.

518 Вычислить:

1) $\frac{(2-3i)(3-2i)}{1+i}$; 2) $\frac{(3-i)(1+3i)}{2-i}$; 3) $\frac{3-4i}{(1+i)(2-i)}$;

4) $\frac{2-3i}{(1-i)(3+i)}$; 5) $\frac{5}{1+2i}+\frac{5}{2-i}$; 6) $\frac{3}{2-3i}+\frac{3}{2+3i}$.

519 Решить уравнение:

1) $z(2+i)=3-i$; 2) $z(1-2i)=2+5i$;

3) $z(1+i)-i=4$; 4) $z(1-i)+3=i$.

520 Разложить на комплексно сопряженные множители (a и b — действительные числа):

1) a^2+4b^2; 2) $9a^2+25b^2$; 3) $8a^2+16b^2$; 4) $81a^2+5b^2$.

521 Вычислить:

1) $(3+2i)^2$; 2) $(2-i)^3$; 3) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; 4) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^4$;

5) $(2+3i)^2-(2-3i)^2$; 6) $(3+4i)^2+(3-4i)^2$.

§ 34* Квадратное уравнение с комплексным неизвестным

Рассмотрим сначала простейшее квадратное уравнение

$$z^2=a,$$

где a — заданное число, z — неизвестное.

На множестве действительных чисел это уравнение:

1) имеет один корень $z=0$, если $a=0$;

2) имеет два действительных корня $z_{1,2}=\pm\sqrt{a}$, если $a>0$;

3) не имеет действительных корней, если $a<0$.

На множестве комплексных чисел это уравнение всегда имеет корень.

Задача 1 Найти комплексные корни уравнения $z^2 = a$, если:
1) $a = -1$; 2) $a = -25$; 3) $a = -3$.

▶ 1) $z^2 = -1$. Так как $i^2 = -1$, то это уравнение можно записать в виде $z^2 = i^2$, или $z^2 - i^2 = 0$. Отсюда, раскладывая левую часть на множители, получаем $(z - i)(z + i) = 0$, $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Ответ $z_{1,2} = \pm i$.

2) $z^2 = -25$. Учитывая, что $i^2 = -1$, преобразуем это уравнение:

$$z^2 = (-1) \cdot 25, \quad z^2 = i^2 \cdot 5^2, \quad z^2 - 5^2 \cdot i^2 = 0,$$
$$(z - 5i)(z + 5i) = 0, \text{ откуда } z_1 = 5i, \ z_2 = -5i.$$

Ответ $z_{1,2} = \pm 5i$.

3) $z^2 = -3$, $z^2 = i^2 (\sqrt{3})^2$, $z^2 - (\sqrt{3})^2 i^2 = 0$,
$(z - \sqrt{3}i)(z + \sqrt{3}i) = 0$, $z_1 = \sqrt{3}i$, $z_2 = -\sqrt{3}i$.

Ответ $z_{1,2} = \pm\sqrt{3}i$. ◁

Вообще, уравнение $z^2 = a$, где $a < 0$, имеет два комплексных корня: $z_{1,2} = \pm\sqrt{|a|}\,i$.

Используя равенство $i^2 = -1$, квадратные корни из отрицательных чисел принято записывать так: $\sqrt{-1} = i$, $\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i$, $\sqrt{-7} = i\sqrt{7}$.
Итак, $\sqrt{a}$ определен для любого действительного числа a (положительного, отрицательного и нуля). Поэтому любое квадратное уравнение вида

$$az^2 + bz + c = 0,$$

где a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$, имеет корни. Эти корни находятся по известной формуле:

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{1}$$

Задача 2 Решить уравнение $z^2 - 4z + 13 = 0$.

▶ По формуле (1) находим:

$$z_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 52}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2} =$$
$$= \frac{4 \pm i\sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6i}{2} = 2 \pm 3i. \ ◁$$

Заметим, что найденные в этой задаче корни являются сопряженными: $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 2 - 3i$. Найдем сумму и произведение этих корней:

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (2 - 3i) = 4,$$
$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(2 - 3i) = 13.$$

Число 4 — это второй коэффициент уравнения $z^2 - 4z + 13 = 0$, взятый с противоположным знаком, а число 13 — свободный член, т. е. в этом случае справедлива *теорема Виета*. Она справедлива для любого квадратного уравнения: если z_1 и z_2 — корни уравнения $az^2 + bz + c = 0$, то $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$, $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Задача 3 Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень $z_1 = -1 - 2i$.

▶ Второй корень z_2 уравнения является числом, сопряженным с данным корнем z_1, т. е. $z_2 = -1 + 2i$. По теореме Виета находим $p = -(z_1 + z_2) = 2$, $q = z_1 z_2 = 5$.

Ответ $z^2 + 2z + 5 = 0$. ◁

Упражнения

Решить уравнение (**522—524**).

522 1) $z^2 = -81$; 2) $z^2 = -3$;
3) $z^2 + 0{,}01 = 0$; 4) $9z^2 + 125 = 0$.

523 1) $z^2 - 2z + 2 = 0$; 2) $z^2 - 4z + 5 = 0$;
3) $z^2 + 6z + 13 = 0$; 4) $z^2 + 4z + 13 = 0$;
5) $z^2 + 2z + 17 = 0$; 6) $z^2 - 8z + 41 = 0$.

524 1) $9z^2 + 6z + 10 = 0$; 2) $4z^2 + 4z + 5 = 0$;
3) $9z^2 - 12z + 5 = 0$; 4) $16z^2 - 32z + 17 = 0$;
5) $z^2 + 4z + 7 = 0$; 6) $z^2 - 6z + 11 = 0$.

525 Составить приведенное квадратное уравнение, имеющее корни:
1) $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 2 - 2i$; 2) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 2 - 3i$;
3) $z_1 = -4 + i$, $z_2 = -4 - i$; 4) $z_1 = -7 - 4i$, $z_2 = -7 + 4i$.

526 Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее данный корень, и проверить ответ, решив полученное уравнение:
1) $z_1 = -1 + \frac{1}{3}i$; 2) $z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i$;
3) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{3}$; 4) $z_1 = \sqrt{3} - i\sqrt{2}$.

527 Разложить на множители квадратный трехчлен:

1) z^2+2z+5;   2) $z^2-2z+10$;
3) $4z^2+8z+5$;   4) $25z^2+50z+26$.

528 Решить уравнение:

1) $z^4+5z^2-36=0$;   2) $z^4-8z^2-9=0$;
3) $z^4-z^2-6=0$;   4) $z^4+2z^2-15=0$;
5) $z^4+3z^2-18=0$;   6) $z^4+4z^2-32=0$.

Упражнения к главе IV

Решить уравнение **(529—531)**.

529 1) $x^2-12=0$;   2) $x^2-50=0$;
3) $\frac{1}{3}x^2+2x=0$;   4) $3x-\frac{2}{5}x^2=0$.

530 1) $x^2+4x-45=0$;   2) $x^2-9x-52=0$;
3) $3x^2-7x-40=0$;   4) $5x^2+17x-126=0$.

531 1) $4x^2-2x-3=0$;   2) $9x^2-3x-4=0$;
3) $4x^2-8x-1=0$;   4) $3x^2+4x-1=0$.

532 Не решая уравнения, определить, сколько действительных корней оно имеет:

1) $x^2-5x+6=0$;   2) $5x^2+7x-8=0$;
3) $25x^2-10x+1=0$;   4) $9x^2+30x+25=0$.

533 Разложить на множители квадратный трехчлен:

1) $x^2+12x+30$;   2) $x^2-10x+16$;
3) $2x^2+x-1$;   4) $2x^2-3x-2$.

534 Сократить дробь:

1) $\frac{x^2-9}{x+3}$;   2) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x+2}$;
3) $\frac{16x^2-24x+9}{4x^2+5x-6}$;   4) $\frac{25x^2+10x+1}{5x^2-14x-3}$.

Решить уравнение **(535—536)**.

535 1) $x^4-9x^2+20=0$;   2) $x^4-11x^2+18=0$;
3) $2x^4-5x^2+2=0$;   4) $5x^4-16x^2+3=0$.

536 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}=\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2+x}{x+3}=\frac{5-x}{x}$;

3) $\frac{y+3}{y^2-y}+\frac{6-y}{1-y^2}=\frac{y+5}{y+y^2}$; 4) $\frac{y+4}{y-4}-\frac{y}{4-y}=2-\frac{4}{y}$.

537 Найти два числа, сумма которых равна 3, а сумма их квадратов равна 5.

538 Найти два числа, разность которых равна 1, а сумма их квадратов равна $3\frac{2}{9}$.

539 Одна сторона прямоугольника на 5 м больше другой, а его площадь равна 84 м^2. Найти стороны прямоугольника.

540 Площадь прямоугольника равна 675 см^2. Найти стороны прямоугольника, если одна из них на 30 см меньше другой.

541 Скорость вертолета Ми-6 относительно воздуха равна 300 км/ч. Расстояние в 224 км вертолет пролетел дважды: один раз — по ветру, другой раз — против ветра. Определить скорость ветра, если на полет против ветра вертолет затратил на 6 мин больше, чем на полет по ветру. (При вычислении использовать микрокалькулятор.)

542 Скорость велосипедиста на первой половине пути была на 3 км/ч больше, чем его скорость на второй половине пути. С какой скоростью велосипедист проехал вторую половину пути, если весь путь в 90 км он преодолел за 5,5 ч?

543 На посадке деревьев работали две бригады. Первая бригада ежедневно высаживала на 40 деревьев больше, чем вторая, и посадила 270 деревьев. Вторая бригада работала на 2 дня больше первой и посадила 250 деревьев. Сколько дней работала на посадке деревьев каждая бригада?

544 Решить уравнение (z — комплексное число):

1) $z^2+2z+5=0$; 2) $z^2-6z+10=0$;

3) $9z^2-6z+10=0$; 4) $4z^2+16z+17=0$.

545 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+3y=10, \\ xy=3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2y=-7, \\ xy=-6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+y=-7, \\ xy=12; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^2-y^2=200, \\ x+y=20; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^2-y^2=9, \\ x-y=1; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ y-x=1; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x-y=3, \\ x^2+y^2=5. \end{cases}$

Проверь себя!

1 Решить уравнение:

1) $3x^2=0$; 2) $(x+1)(x-1)=0$;

3) $4x^2-1=0$; 4) $3x^2=5x$;

5) $4x^2-4x+1=0$; 6) $x^2-16x-17=0$;

7) $0{,}3x^2+5x=2$; 8) $x^2-4x+5=0$.

2 Разложить на множители:

1) x^2+x-6; 2) $2x^2-x-3$.

3 Решить задачу:

Расстояние между селами 36 км один велосипедист преодолевает на 1 ч быстрее другого. Найти скорость каждого велосипедиста, если известно, что скорость одного на 3 км/ч больше скорости другого.

4 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-y^2=72, \\ x+y=9. \end{cases}$$

Решить уравнение **(546—548)**.

546 1) $3x(x-2)=x-4$; 2) $\frac{x^2-2}{6}-\frac{1-x}{2}=\frac{x-5}{6}$.

547 1) $2x(x-2)=(x+1)^2-9$; 2) $5x(x-4)=(x-8)^2-65$;

3) $\frac{(x+2)^2}{3}-\frac{(x+1)^2}{2}=1$; 4) $\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{(x-2)^2}{5}=4$.

548 1) $(x-5)(x-6)=30$; 2) $(x+2)(x+3)=6$;

3) $(x-1)(x-4)=3x$; 4) $(x-2)(x+8)=6x$.

549 При каких значениях x выражение $x^2+3x-88$ принимает значение, равное: 1) 0; 2) 20; 3) -18; 4) -70?

550 Сколько действительных корней имеет квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, если:

1) $a=3,\ b=1,\ c=-4$; 2) $a=5,\ b=2,\ c=3$;

3) $a=25,\ b=-10,\ c=1$; 4) $a=1,\ b=0,\ c=-25$?

551 При каких значениях x значения данных выражений равны:

1) $\frac{9}{2x+2}+\frac{x}{x-1}$ и $\frac{1-3x}{2-2x}$; 2) $\frac{3}{x^2-1}-\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2x-2}$;

3) $\frac{2}{x^2-4}$ и $\frac{1}{x-2}-\frac{x-4}{x^2+2x}$; 4) $\frac{x-2}{x^2-x}$ и $\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x^2+x}$?

552 Упростить выражение:

1) $(x-10)\cdot\left(\frac{x+3}{x^2-7x-30}+\frac{x+4}{x^2-6x-40}\right)$;

2) $\left(\frac{x-1}{2x^2+3x-5}-\frac{x+1}{3x^2+4x+1}\right)\cdot(6x^2+17x+5)$.

553 Решить уравнение:

1) $\frac{12x+4}{x^2+2x-3}=\frac{3x-2}{x-1}-\frac{2x+3}{x+3}$;

2) $\frac{5}{x^2-4}-\frac{8}{x^2-1}=\frac{2}{x^2-3x+2}-\frac{20}{x^2+3x+2}$.

554 Мастерская в определенный срок должна выпустить 5400 пар обуви. Фактически она выпускала в день на 30 пар больше, чем предполагалось, и выполнила заказ на 9 дней раньше срока. За сколько дней был выполнен заказ?

555 Два туриста выехали одновременно на велосипедах из села A и направились разными дорогами в село B. Первый должен был проехать 30 км, а второй — 20 км. Скорость движения первого туриста была на 3 км/ч больше скорости второго. Однако второй турист прибыл в B на 20 мин раньше первого. Сколько времени был в дороге каждый турист?

556 Две бригады рабочих закончили ремонт участка дороги за 4 ч. Если бы сначала одна из них отремонтировала половину всего участка, а затем другая — оставшуюся часть, то весь ремонт был бы закончен за 9 ч. За сколько времени каждая бригада в отдельности могла бы отремонтировать весь участок?

557 Поезд должен пройти 54 км. Пройдя 14 км, он был задержан у семафора на 10 мин. Увеличив скорость после этого на 10 км/ч, он прибыл на место назначения с опозданием на 2 мин. Определить первоначальную скорость поезда.

558 Экскурсанты отправились из города A в город B на теплоходе, а возвратились обратно на поезде. Расстояние от A до B по водному пути равно 108 км, а по железной дороге 88 км. Поездка по железной дороге продолжалась на 4 ч меньше, чем на теплоходе. Сколько километров в час проходил поезд, если его скорость была на 26 км/ч больше скорости теплохода?

559 В зрительном зале клуба было 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале клуба?

560 На эстрадный концерт в фабричном клубе было продано на 2000 р. билетов по одной стоимости и на 1200 р. билетов стоимостью на 5 р. больше. Каковы цены билетов, если на концерте было 280 человек?

561 Решить уравнение (z — комплексное число):

1) $z^2+4z+19=0$; 2) $z^2-2z+3=0$;

3) $2z^2-z+2=0$; 4) $3z^2+2z+1=0$.

562 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = 6; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y - x = 4, \\ 3x^2 - y + 2x = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} (x-1)(y-1) = 3, \\ (x+2)(y+2) = 24. \end{cases}$

563 На изготовление одной детали первый рабочий затрачивал на 2,5 мин больше, чем второй. После того как первый рабочий начал изготавливать за каждый час на 3 детали больше, а второй — на одну деталь больше, чем раньше, их производительность труда стала одинаковой. Сколько деталей изготавливал каждый рабочий за 1 ч первоначально?

564 Из пункта A в пункт B отправился автомобиль, а одновременно навстречу ему из пункта B отправился автобус. Автомобиль прибыл в B через 40 мин после встречи с автобусом, а автобус прибыл в A через 1,5 ч после их встречи. Найти скорость автомобиля и автобуса, если расстояние между пунктами A и B равно 100 км (скорости автомобиля и автобуса постоянны).

565 Записать приведенное квадратное уравнение, имеющее корни x_1 и x_2:

1) $x_1 = 3,\ x_2 = -1;$ 2) $x_1 = 2,\ x_2 = 3;$

3) $x_1 = 0,\ x_2 = 4;$ 4) $x_1 = -1,\ x_2 = 5.$

566 Пусть $x_1 = -3$ — корень уравнения $5x^2 + 12x + q = 0$. Найти x_2.

567 Не вычисляя корней x_1 и x_2 уравнения $x^2 - 7x - 21 = 0$, найти:

1) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2};$ 2) $x_1^2 + x_2^2;$ 3) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1};$ 4) $x_1^4 + x_2^4.$

568 В уравнении $(a-7)x^2 + 13x - a = 0$ один из корней равен 2. Найти значение a и второй корень уравнения.

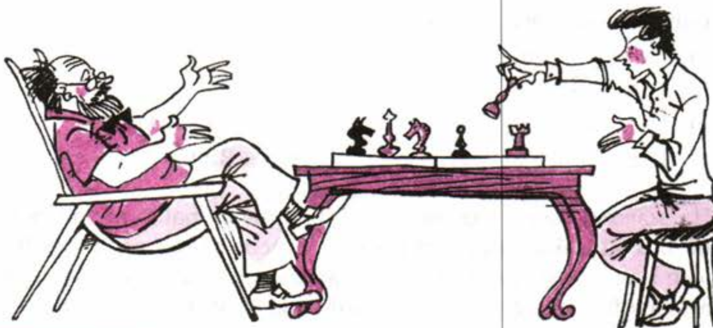
569 Корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ — взаимно обратные положительные числа. Найти q.

570 Сумма квадратов корней уравнения $x^2 + px - 3 = 0$ равна 10. Найти p.

571 Решить уравнение:

1) $\frac{2}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^3+1};$ 2) $\frac{30}{x^2-1} - \frac{13}{x^2+x+1} = \frac{7+18x}{x^3-1}.$

572 На межшкольном шашечном турнире было сыграно 56 партий, причем каждый игрок играл с каждым две партии (белыми и черными). Сколько школьников участвовало в турнире?



573 В первенстве по шахматам была сыграна 231 партия. Сколько шахматистов участвовало в турнире, если каждый с каждым играл по одному разу?

574 В чемпионате по волейболу было сыграно 66 матчей. Сколько команд участвовало в чемпионате, если каждая команда играла с каждой по одному разу?

575 Несколько спортсменов, уезжая после соревнований домой, обменялись сувенирами (каждый подарил каждому по одному сувениру). Сколько было спортсменов, если сувениров понадобилось 30?

576 *Задача Маклорена*[1]. Несколько человек обедали вместе и по счету должны были уплатить 175 шиллингов. Так как у двоих из них денег не оказалось, каждому из оставшихся пришлось уплатить на 10 шиллингов больше. Сколько человек обедало?

577 Составить программу для вычисления значения выражения $\sqrt{b^2-4ac}$ на микрокалькуляторе и найти его при:

1) $a=3,\ b=12,\ c=-4551$;
2) $a=2,\ b=114,\ c=1612$;
3) $a=1{,}5,\ b=-2{,}1,\ c=-55{,}08$;
4) $a=2{,}5,\ b=-30{,}75,\ c=93{,}8$.

[1] К. Маклорен (1698—1746) — шотландский математик, ученик И. Ньютона.

V
глава

Квадратичная функция

§ 35 Определение квадратичной функции

В VII классе вы познакомились с линейной функцией $y = kx + b$ и ее графиком.

В различных областях науки и техники часто встречаются функции, которые называют *квадратичными*. Приведем примеры.

1) Площадь квадрата y со стороной x вычисляется по формуле $y = x^2$.

2) Если тело брошено вверх со скоростью v, то расстояние s от него до поверхности земли в момент времени t определяется формулой $s = -\frac{gt^2}{2} + vt + s_0$, где s_0 — расстояние от тела до поверхности земли в момент времени $t = 0$.

В этих примерах рассмотрены функции вида $y = ax^2 + bx + c$. В первом примере $a = 1$, $b = c = 0$, а переменными являются x и y. Во втором примере $a = -\frac{g}{2}$, $b = v$, $c = s_0$, а переменные обозначены буквами t и s.

Определение. Функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — заданные действительные числа, $a \neq 0$, x — действительная переменная, называется *квадратичной функцией*.

Например, квадратичными являются функции:

$$y = x^2, \ y = -2x^2, \ y = x^2 - x, \ y = x^2 - 5x + 6,$$
$$y = -3x^2 + \frac{1}{2}x.$$

Задача 1 Найти значение функции $y(x) = x^2 - 5x + 6$ при $x = -2$, $x = 0$, $x = 3$.

▶ $y(-2) = (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 6 = 20$;
$y(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$; $y(3) = 3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$. ◁

Задача 2 При каких значениях x квадратичная функция $y = x^2 + 4x - 5$ принимает значение, равное:
1) 7; 2) −9; 3)* −10; 4) 0?

▶ 1) По условию $x^2 + 4x - 5 = 7$. Решая это уравнение, получаем:

$$x^2 + 4x - 12 = 0,$$
$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + 12} = -2 \pm 4,$$
$$x_1 = 2, \ x_2 = -6.$$

2) По условию $x^2 + 4x - 5 = -9$, откуда

$$x^2 + 4x + 4 = 0, \quad (x + 2)^2 = 0, \quad x = -2.$$

3)* По условию $x^2 + 4x - 5 = -10$, откуда $x^2 + 4x + 5 = 0$. Решая это уравнение, находим $x_{1,2} = -2 \pm i$. Следовательно, уравнение не имеет действительных корней, и поэтому данная функция не принимает значение −10 ни при каких действительных значениях x.

4) По условию $x^2 + 4x - 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -5$. ◁

В последнем случае были найдены значения x, при которых функция $y = x^2 + 4x - 5$ принимает значение, равное 0, т. е. $y(1) = 0$ и $y(-5) = 0$. Такие значения x называют *нулями квадратичной функции*.

Задача 3 Найти нули функции $y = x^2 - 3x$.

▶ Решая уравнение $x^2 - 3x = 0$, находим $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. ◁

Упражнения

578 (Устно.) Является ли квадратичной функция:

1) $y = 2x^2 + x + 3$; 2) $y = 3x^2 - 1$;
3) $y = 5x + 1$; 4) $y = x^3 + 7x - 1$;
5) $y = 4x^2$; 6) $y = -3x^2 + 2x$?

№ 7

НАЧЕРТИ ТРИ ПРЯМЫЕ ТАК, ЧТОБЫ КАЖДАЯ ТОЧКА ОКАЗАЛАСЬ ОТДЕЛЕННОЙ ОТ ЛЮБОЙ ДРУГОЙ ТОЧКИ.

579 Найти действительные значения x, при которых квадратичная функция $y=x^2-x-3$ принимает значение, равное:
1) -1; 2) -3; 3) $-\frac{13}{4}$; 4) -5.

580 При каких действительных значениях x квадратичная функция $y=-4x^2+3x-1$ принимает значение, равное:
1) -2; 2) -8; 3) $-0{,}5$; 4) -1?

581 Определить, какие из чисел -2; $-\sqrt{3}$; -1; $-0{,}2$; 0; 1; $\sqrt{3}$ являются нулями квадратичной функции:
1) $y=x^2+2x$; 2) $y=x^2+x$;
3) $y=x^2-3$; 4) $y=5x^2-4x-1$.

582 Найти нули квадратичной функции:
1) $y=x^2-x$; 2) $y=x^2+3$;
3) $y=12x^2-17x+6$; 4) $y=-6x^2+7x-2$;
5) $y=3x^2-5x+8$; 6) $y=2x^2-7x+9$;
7) $y=8x^2+8x+2$; 8) $y=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$;
9) $y=2x^2+x-1$; 10) $y=3x^2+5x-2$.

583 Найти коэффициенты p и q квадратичной функции $y=x^2+px+q$, если известны нули x_1 и x_2 этой функции:
1) $x_1=2$, $x_2=3$; 2) $x_1=-4$, $x_2=1$;
3) $x_1=-1$, $x_2=-2$; 4) $x_1=5$, $x_2=-3$.

584 Найти значения x, при которых функции $y=x^2+2x-3$ и $y=2x+1$ принимают равные значения.

585 Найти координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y=4x^2+4x+1$ и $y=2x+1$;

2) $y=x^2-8x+15$ и $y=\frac{2}{3}x-2$;

3) $y=x^2-3\sqrt{2}x+4$ и $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-1$;

4) $y=\sqrt{3}x^2+3x$ и $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$.

§ 36 Функция $y=x^2$

Рассмотрим функцию $y=x^2$, т. е. квадратичную функцию $y=ax^2+bx+c$ при $a=1$, $b=c=0$. Для построения графика этой функции составим таблицу некоторых ее значений:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=x^2$	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Построив указанные в таблице точки и соединив их плавной кривой, получим график функции $y=x^2$ (рис. 32). Кривая, являющаяся графиком функции $y=x^2$, называется *параболой*.

Рассмотрим *свойства функции* $y=x^2$.

1) Значение функции $y=x^2$ *положительно* при $x\neq0$ и *равно нулю* при $x=0$. Следовательно, парабола $y=x^2$ проходит через начало координат, а остальные точки параболы лежат выше оси абсцисс. Говорят, что *парабола* $y=x^2$ *касается оси абсцисс* в точке (0; 0).

2) График функции $y=x^2$ симметричен *относительно оси ординат*, так как $(-x)^2=x^2$. Например, $y(-3)=y(3)=9$ (рис. 32). Таким образом, ось ординат является *осью симметрии параболы*. Точку пересечения параболы с ее осью симметрии называют

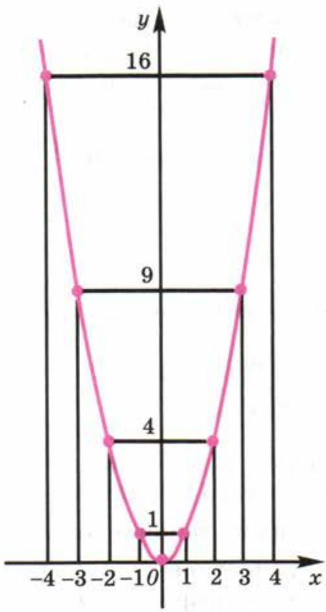


Рис. 31

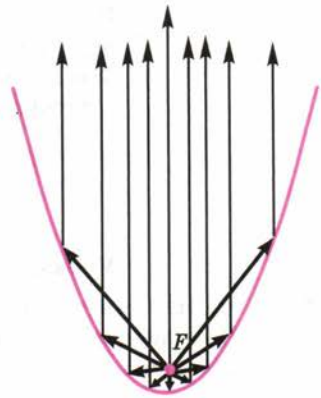


Рис. 32

вершиной параболы. Для параболы $y = x^2$ вершиной является начало координат.

3) При $x \geqslant 0$ большему значению x соответствует большее значение y. Например, $y(3) > y(2)$. Говорят, что функция $y = x^2$ *возрастает на промежутке* $x \geqslant 0$ (рис. 31).

При $x \leqslant 0$ большему значению x соответствует меньшее значение y. Например, $y(-2) < y(-4)$. Говорят, что функция $y = x^2$ *убывает на промежутке* $x \leqslant 0$ (рис. 31).

Задача Найти координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = x + 6$.

▶ Координаты точки пересечения являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 6. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $x^2 = x + 6$, $x^2 - x - 6 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Подставляя значения x_1 и x_2 в одно из уравнений системы, находим $y_1 = 9$, $y_2 = 4$.

Ответ (3; 9), (−2; 4). ◁

Парабола обладает многими интересными свойствами, которые широко используются в технике. Например, на оси симметрии параболы есть точка, которую называют *фокусом параболы* (рис. 32).

Если в этой точке находится источник света, то все отраженные от параболы лучи идут параллельно. Это свойство используется при изготовлении прожекторов, локаторов и других приборов.

Фокусом параболы $y = x^2$ является точка $\left(0;\ \frac{1}{4}\right)$.

Упражнения

586 На миллиметровой бумаге построить график функции $y = x^2$. По графику приближенно найти:
1) значение y при $x = 0{,}8$; $x = 1{,}5$; $x = 1{,}9$; $x = -2{,}3$; $x = -1{,}5$;
2) значения x, если $y = 2$; $y = 3$; $y = 4{,}5$; $y = 6{,}5$.

587 Не строя графика функции $y = x^2$, определить, какие точки принадлежат ему: $A(2;\ 6)$, $B(-1;\ 1)$, $C(12;\ 144)$, $D(-3;\ -9)$.

588 (Устно.) Найти координаты точек, симметричных точкам $A(3;\ 9)$, $B(-5;\ 25)$, $C(4;\ 15)$, $D(\sqrt{3};\ 3)$ относительно оси ординат. Принадлежат ли все эти точки графику функции $y = x^2$?

589 (Устно.) Сравнить значения функции $y = x^2$ при:
1) $x = 2{,}5$ и $x = 3\frac{1}{3}$; 2) $x = 0{,}4$ и $x = 0{,}3$;
3) $x = -0{,}2$ и $x = -0{,}1$; 4) $x = 4{,}1$ и $x = -5{,}2$.

590 Найти координаты точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой:
1) $y = 25$; 2) $y = 5$; 3) $y = -x$;
4) $y = 2x$; 5) $y = 3 - 2x$; 6) $y = 2x - 1$.

591 Является ли точка A точкой пересечения параболы $y = x^2$ и прямой:
1) $y = -x - 6$, $A(-3;\ 9)$;
2) $y = 5x - 6$, $A(2;\ 4)$?

592 Верно ли утверждение, что функция $y = x^2$ возрастает:
1) на отрезке $[1;\ 4]$; 2) на интервале $(2;\ 5)$;
3) на промежутке $x > 3$; 4) на отрезке $[-3;\ 4]$?

593 На одной координатной плоскости построить параболу $y = x^2$ и прямую $y = 3$. При каких значениях x точки параболы лежат выше прямой? ниже прямой?

594 При каких x значения функции $y = x^2$:
1) больше 9; 2) не больше 25;
3) не меньше 16; 4) меньше 36?

§ 37

Функция $y = ax^2$

Задача 1 Построить график функции $y = 2x^2$.

▶ Составим таблицу значений функции $y = 2x^2$:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = 2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

Построим найденные точки и проведем через них плавную кривую. ◁

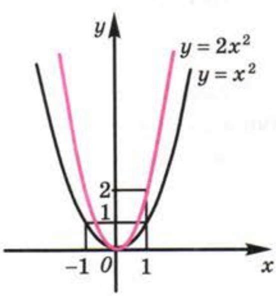


Рис. 33

Сравним графики функций $y = 2x^2$ и $y = x^2$ (рис. 33). При одном и том же x значение функции $y = 2x^2$ в 2 раза больше значения функции $y = x^2$.

Это значит, что каждую точку графика $y = 2x^2$ можно получить из точки графика функции $y = x^2$ с той же абсциссой увеличением ее ординаты в 2 раза.

Говорят, что график функции $y = 2x^2$ получается *растяжением графика функции* $y = x^2$ от оси Ox вдоль оси Oy в 2 раза.

Задача 2 Построить график функции $y = \frac{1}{2}x^2$.

▶ Составим таблицу значений функции $y = \frac{1}{2}x^2$:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$y = \frac{1}{2}x^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5

Построив найденные точки, проведем через них плавную кривую (рис. 34). ◁

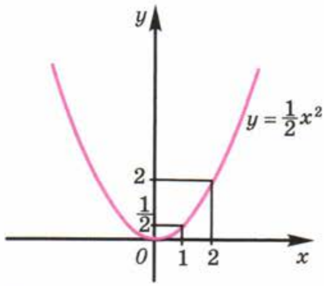


Рис. 34

Сравним графики функций $y=\frac{1}{2}x^2$ и $y=x^2$. Каждую точку графика $y=\frac{1}{2}x^2$ можно получить из точки графика функции $y=x^2$ с той же абсциссой уменьшением ее ординаты в 2 раза. Говорят, что график функции $y=\frac{1}{2}x^2$ получается *сжатием графика функции* $y=x^2$ к оси Ox вдоль оси Oy в 2 раза.

Задача 3 Построить график функции $y=-x^2$.

▶ Сравним функции $y=-x^2$ и $y=x^2$. При одном и том же x значения этих функций равны по модулю и противоположны по знаку. Следовательно, график функции $y=-x^2$ можно получить симметрией относительно оси Ox графика функции $y=x^2$ (рис. 35).

Аналогично график функции $y=-\frac{1}{2}x^2$ симметричен графику функции $y=\frac{1}{2}x^2$ относительно оси Ox (рис. 36).

График функции $y=ax^2$ при любом $a \neq 0$ также называют *параболой*. При $a>0$ ветви параболы направлены *вверх*, а при $a<0$ — *вниз*.

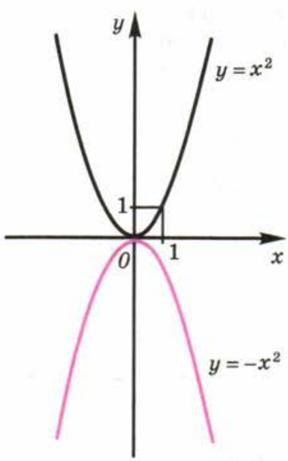


Рис. 35

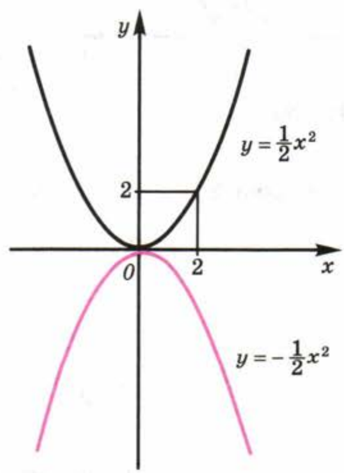


Рис. 36

Заметим, что фокус параболы $y = ax^2$ находится в точке $\left(0;\ \frac{1}{4a}\right)$.

Перечислим *основные свойства функции* $y = ax^2$, где $a \neq 0$.

1) Если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ принимает положительные значения при $x \neq 0$; если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ принимает отрицательные значения при $x \neq 0$; значение функции $y = ax^2$ равно 0 только при $x = 0$.

2) Парабола $y = ax^2$ симметрична относительно оси ординат.

3) Если $a > 0$, то функция $y = ax^2$ возрастает при $x \geqslant 0$ и убывает при $x \leqslant 0$; если $a < 0$, то функция $y = ax^2$ убывает при $x \geqslant 0$ и возрастает при $x \leqslant 0$.

Все эти свойства видны на графиках (рис. 37, 38).

Задача 4 На одной координатной плоскости построить графики функций $y = 2x^2$ и $y = 8$. С помощью этих графиков решить неравенство $2x^2 > 8$.

▶ Построим графики данных функций (рис. 39). Для того чтобы решить неравенство $2x^2 > 8$, нужно найти те значения x, при которых точки параболы $y = 2x^2$ лежат выше прямой $y = 8$.

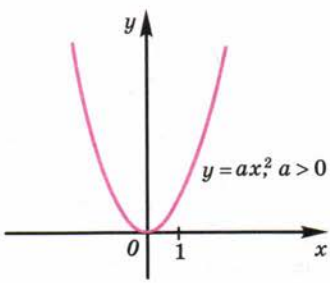


Рис. 37

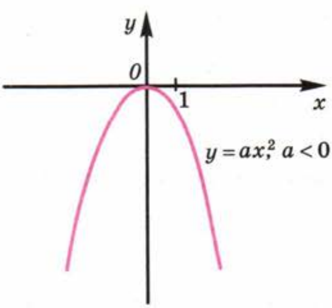


Рис. 38

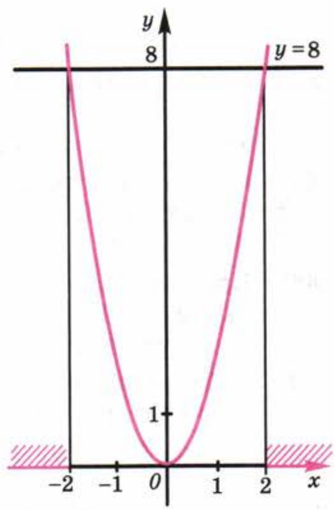


Рис. 39

Из рисунка 39 видно, что неравенство $2x^2>8$ верно при $x<-2$, а также при $x>2$. ◁

Задача 5 Найти значение a, при котором одна из точек пересечения параболы $y=ax^2$ и прямой $y=2x+4$ имеет абсциссу $x=2$.

▶ Из уравнения прямой $y=2x+4$ находим ординату точки пересечения: $y=2\cdot2+4=8$. Подставляя $x=2$, $y=8$ в уравнение параболы $y=ax^2$, получаем $8=a\cdot2^2$, откуда $a=2$. ◁

Упражнения

595 На миллиметровой бумаге построить график функции $y=3x^2$. По графику приближенно найти:
1) значения y при $x=-2{,}8;\ -1{,}2;\ 1{,}5;\ 2{,}5$;
2) значения x, если $y=9;\ 6;\ 2;\ 8;\ 1{,}3$.

596 (Устно.) Определить направление ветвей параболы:
1) $y=3x^2$; 2) $y=\frac{1}{3}x^2$;
3) $y=-4x^2$; 4) $y=-\frac{1}{3}x^2$.

597 На одной координатной плоскости построить графики функций:
1) $y=x^2$ и $y=3x^2$; 2) $y=-x^2$ и $y=-3x^2$;
3) $y=3x^2$ и $y=-3x^2$; 4) $y=\frac{1}{3}x^2$ и $y=-\frac{1}{3}x^2$.

Используя графики, выяснить, какие из этих функций возрастают на промежутке $x\geqslant0$.

598 Найти коэффициент a, если парабола $y=ax^2$ проходит через точку:
1) $A(-1;\ 1)$; 2) $B(2;\ 1)$; 3) $C(1;\ 1)$; 4) $D(3;\ -1)$.

599 С помощью графика функции $y=-2x^2$ решить неравенство:
1) $-2x^2\leqslant-8$; 2) $-2x^2>-18$;
3) $-2x^2\leqslant1$; 4) $-2x^2\geqslant-32$.

600 При каких x значения функции $y=3x^2$:
1) больше 12; 2) не больше 27;
3) не меньше 3; 4) меньше 75?

601 Найти координаты точек пересечения графиков функций:
1) $y=2x^2$ и $y=3x+2$;
2) $y=-\frac{1}{2}x^2$ и $y=\frac{1}{2}x-3$.

602 Найти значение a, при котором одна из точек пересечения параболы $y=ax^2$ и прямой $y=5x-2$ имеет абсциссу $x=2$.

603 Найти значение k, при котором парабола $y=-5x^2$ и прямая $y=kx+6$ пересекаются в точке с абсциссой $x=2$. Имеются ли другие точки пересечения графиков?

604 Является ли убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ функция:

1) $y=4x^2$; 2) $y=\frac{1}{4}x^2$; 3) $y=-5x^2$; 4) $y=-\frac{1}{5}x^2$?

605 Выяснить, является ли функция $y=-2x^2$ возрастающей или убывающей:

1) на отрезке $[-4; -2]$; 2) на интервале $(3; 5)$;
3) на отрезке $[-5; 0]$; 4) на интервале $(-3; 2)$.

606 Путь, пройденный телом при равноускоренном движении, вычисляется по формуле $s=\frac{at^2}{2}$, где s — путь в метрах, a — ускорение в м/с^2, t — время в секундах. Найти ускорение a, если за 8 с тело прошло путь, равный 96 м.

607 Пусть парабола $y=ax^2$ и прямая $y=kx+b$ имеют только одну общую точку и абсцисса этой точки равна x_0. Доказать, что эта прямая проходит через точку $\left(\frac{x_0}{2}; 0\right)$.

§ 38 Функция $y=ax^2+bx+c$

Задача 1 Построить график функции $y=x^2-2x+3$ и сравнить его с графиком функции $y=x^2$.

▶ Составим таблицу значений функции

$$y=x^2-2x+3:$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2-2x+3$	18	11	6	3	2	3	6

Построим найденные точки и проведем через них плавную кривую (рис. 40).

Для сравнения графиков преобразуем формулу $y=x^2-2x+3$, используя метод выделения полного

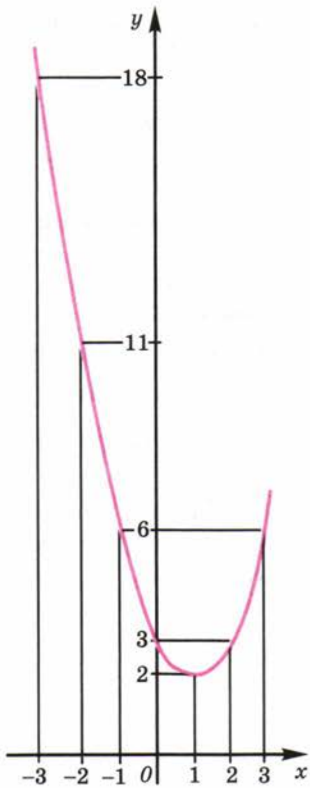


Рис. **40**

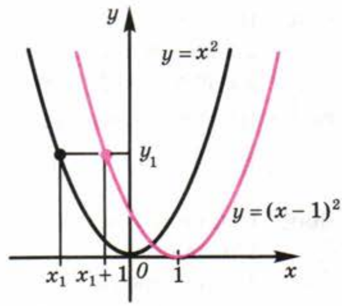


Рис. **41**

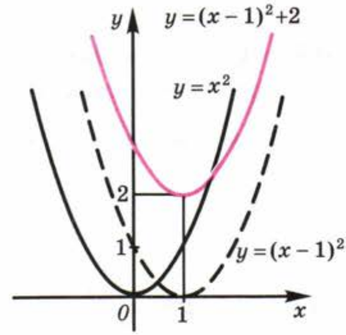


Рис. **42**

квадрата: $y = x^2 - 2x + 1 + 2$, $y = (x - 1)^2 + 2$. Сравним графики функций $y = x^2$ и $y = (x - 1)^2$. Заметим, что если $(x_1;\ y_1)$ — точка параболы $y = x^2$, т. е. $y_1 = x_1^2$, то точка $(x_1 + 1;\ y_1)$ принадлежит графику функции $y = (x - 1)^2$, так как $((x_1 + 1) - 1)^2 = x_1^2 = y_1$. Следовательно, графиком функции $y = (x - 1)^2$ является парабола, полученная из параболы $y = x^2$ *сдвигом* (параллельным переносом) вправо на единицу (рис. 41). Теперь сравним графики функций $y = (x - 1)^2$ и $y = (x - 1)^2 + 2$. При каждом x значение функции $y = (x - 1)^2 + 2$ больше значения функции $y = (x - 1)^2$ на 2. Следовательно, графиком функции $y = (x - 1)^2 + 2$ является парабола, полученная сдвигом параболы $y = (x - 1)^2$ вверх на две единицы (рис. 42).

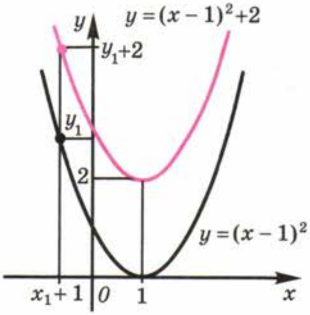


Рис. 43

Итак, графиком функции $y = x^2 - 2x + 3$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y = x^2$ на единицу вправо и на две единицы вверх (рис. 43). Осью симметрии параболы $y = x^2 - 2x + 3$ является прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы — точку (1; 2). ◁

Аналогично доказывается, что *графиком функции* $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ *является парабола*, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$:

вдоль оси абсцисс вправо на x_0, если $x_0 > 0$, влево на $|x_0|$, если $x_0 < 0$;

вдоль оси ординат вверх на y_0, если $y_0 > 0$, вниз на $|y_0|$, если $y_0 < 0$.

Любую квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$ с помощью выделения полного квадрата *можно записать в виде*

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

т. е. в виде $y = a(x - x_0)^2 + y_0$,

где $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Таким образом, графиком функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, получаемая сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей. Равенство $y = ax^2 + bx + c$ называют уравнением параболы. Координаты $(x_0; y_0)$ вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ можно найти по формулам

$$\boldsymbol{x_0 = -\frac{b}{2a}}, \qquad \boldsymbol{y_0 = y(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c}.$$

Ось симметрии параболы $y = ax^2 + bx + c$ — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы.

Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх, если $a > 0$, и направлены вниз, если $a < 0$.

Задача 2 Найти координаты вершины параболы

$$y = 2x^2 - x - 3.$$

▶ Абсцисса вершины параболы

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{4}.$$

Ордината вершины параболы

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c = 2 \cdot \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - 3 = -3\frac{1}{8}.$$

Ответ $\left(\frac{1}{4}; -3\frac{1}{8}\right)$. ◁

Задача 3 Записать уравнение параболы, если известно, что она проходит через точку $(-2; 5)$, а ее вершиной является точка $(-1; 2)$.

▶ Так как вершиной параболы является точка $(-1; 2)$, то уравнение параболы можно записать в виде

$$y = a(x+1)^2 + 2.$$

По условию точка $(-2; 5)$ принадлежит параболе, и, следовательно,

$$5 = a(-2+1)^2 + 2,$$

откуда $a = 3$. Таким образом, парабола задается уравнением

$$y = 3(x+1)^2 + 2, \text{ или } y = 3x^2 + 6x + 5. \ ◁$$

Упражнения

Найти координаты вершины параболы **(608—610)**.

608 (Устно.)
1) $y = (x-3)^2 - 2$; 2) $y = (x+4)^2 + 3$;
3) $y = 5(x+2)^2 - 7$; 4) $y = -4(x-1)^2 + 5$.

609 1) $y = x^2 + 4x + 1$; 2) $y = x^2 - 6x - 7$;
3) $y = 2x^2 - 6x + 11$; 4) $y = -3x^2 + 18x - 7$.

610 1) $y = x^2 + 2$; 2) $y = -x^2 - 5$;
3) $y = 3x^2 - 2x$; 4) $y = -4x^2 + x$.

611 Найти на оси Ox точку, через которую проходит ось симметрии параболы:
1) $y = x^2 + 3$; 2) $y = (x+2)^2$;
3) $y = -3(x+2)^2 + 2$; 4) $y = (x-2)^2 + 2$;
5) $y = x^2 + x + 1$; 6) $y = 2x^2 - 3x + 5$.

612 Проходит ли ось симметрии параболы $y = x^2 - 10x$ через точку:
1) $(5; 10)$; 2) $(3; -8)$; 3) $(5; 0)$; 4) $(-5; 1)$?

613 Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:
1) $y = x^2 - 3x + 2$; 2) $y = -2x^2 + 3x - 1$;
3) $y = 3x^2 - 7x + 12$; 4) $y = 3x^2 - 4x$.

614 Написать уравнение параболы, если известно, что парабола проходит через точку $(-1;\ 6)$, а ее вершиной является точка $(1;\ 2)$.

615 (Устно.) Принадлежит ли точка $(1;\ -6)$ параболе $y=-3x^2+4x-7$?

616 Найти значение k, если точка $(-1;\ 2)$ принадлежит параболе:
1) $y=kx^2+3x-4$; 2) $y=-2x^2+kx-6$.

617 С помощью шаблона параболы $y=x^2$ построить график функции:
1) $y=(x+2)^2$; 2) $y=(x-3)^2$;
3) $y=x^2-2$; 4) $y=-x^2+1$;
5) $y=-(x-1)^2-3$; 6) $y=(x+2)^2+1$.

618 Записать уравнение параболы, полученной из параболы $y=2x^2$:
1) сдвигом вдоль оси Ox на 3 единицы вправо;
2) сдвигом вдоль оси Oy на 4 единицы вверх;
3) сдвигом вдоль оси Ox на 2 единицы влево и последующим сдвигом вдоль оси Oy на единицу вниз;
4) сдвигом вдоль оси Ox на 1,5 единицы вправо и последующим сдвигом вдоль оси Oy на 3,5 единицы вверх.

619 Построить график функции:
1) $y=|x^2-2|$; 2) $y=|1-x^2|$;
3) $y=|2-(x-1)^2|$; 4) $y=|x^2-5x+6|$.

620 Записать уравнение параболы, пересекающей ось абсцисс в точках $x=-1$ и $x=3$, а ось ординат в точке $y=2$.

§ 39 Построение графика квадратичной функции

Задача 1 Построить график функции $y=x^2-4x+3$.

► 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0=-\frac{-4}{2}=2, \quad y_0=2^2-4\cdot 2+3=-1.$$

Построим точку $(2;\ -1)$.

2. Проведем через точку $(2;\ -1)$ прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы (рис. 44, *а*).

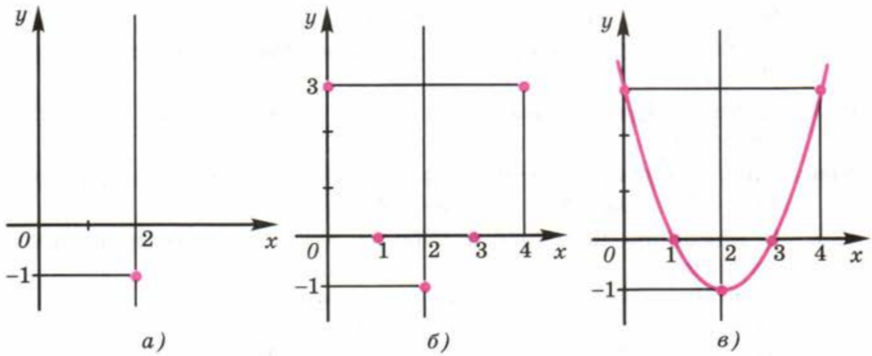


Рис. ***44***

3. Решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, найдем нули функции: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Построим точки (1; 0) и (3; 0) (рис. 44, *б*).

4. Возьмем две точки на оси Ox, симметричные относительно точки $x = 2$, например точки $x = 0$ и $x = 4$. Вычислим значение функции в этих точках: $y(0) = y(4) = 3$. Построим точки (0; 3) и (4; 3).

5. Проведем параболу через построенные точки (рис. 44, *в*). ◁

По такой же схеме можно *построить график любой квадратичной функции* $y = ax^2 + bx + c$:

1. Построить вершину параболы $(x_0; y_0)$, вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы.

3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.

4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно ее оси. Для этого надо взять две точки на оси Ox, симметричные относительно точки x_0, и вычислить соответствующие значения функции (эти значения одинаковы). Например, можно построить точки параболы с абсциссами $x = 0$ и $x = 2x_0$, если $x_0 \neq 0$ (ординаты этих точек равны c).

5. Провести через построенные точки параболу. Заметим, что для более точного построения графика полезно найти еще несколько точек параболы.

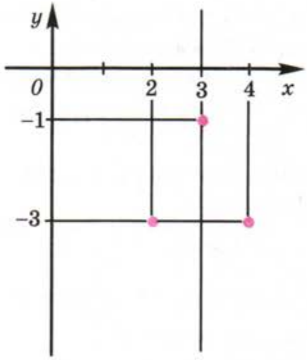


Рис. 45

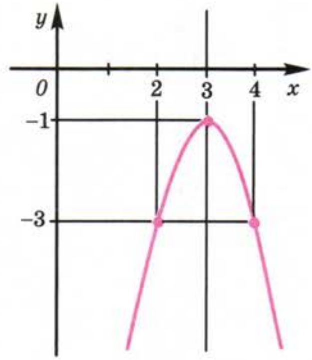


Рис. 46

Задача 2 Построить график функции $y = -2x^2 + 12x - 19$.

▶ 1. Вычислим координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{12}{-4} = 3, \quad y_0 = -2 \cdot 3^2 + 12 \cdot 3 - 19 = -1.$$

Построим точку $(3; -1)$ — вершину параболы (рис. 45).

2. Проведем через точку $(3; -1)$ ось симметрии параболы (рис. 45).

3. Решая уравнение $-2x^2 + 12x - 19 = 0$, убеждаемся, что действительных корней нет, и поэтому парабола не пересекает ось Ox.

4. Возьмем две точки на оси Ox, симметричные относительно точки $x = 3$, например точки $x = 2$ и $x = 4$. Вычислим значение функции в этих точках:

$$y(2) = y(4) = -3.$$

Построим точки $(2; -3)$ и $(4; -3)$ (рис. 45).

5. Проведем параболу через построенные точки (рис. 46). ◁

Задача 3 Построить график функции $y = -x^2 + x + 6$ и выяснить, какими свойствами обладает эта функция.

▶ Для построения графика найдем нули функции: $-x^2 + x + 6 = 0$, откуда $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Координаты вершины параболы можно найти так:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2},$$

$$y_0 = y\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = 6\frac{1}{4}.$$

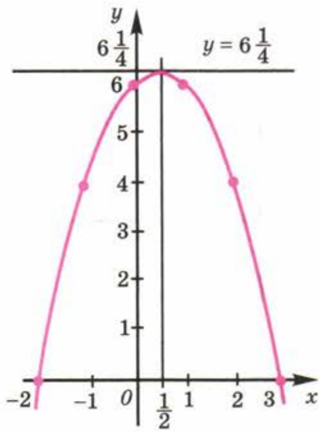


Рис. **47**

Так как $a=-1<0$, то ветви параболы направлены вниз. Найдем еще несколько точек параболы: $y(-1)=4$, $y(0)=6$, $y(1)=6$, $y(2)=4$. Строим параболу (рис. 47).

С помощью графика получим следующие *свойства функции*

$$y=-x^2+x+6:$$

1) При любых значениях x значения функции меньше или равны $6\frac{1}{4}$.

2) Значения функции положительны при $-2<x<3$, отрицательны при $x<-2$ и при $x>3$, равны нулю при $x=-2$ и $x=3$.

3) Функция возрастает на промежутке $x\leqslant\frac{1}{2}$, убывает на промежутке $x\geqslant\frac{1}{2}$.

4) При $x=\frac{1}{2}$ функция принимает наибольшее значение, равное $6\frac{1}{4}$.

5) График функции симметричен относительно прямой $x=\frac{1}{2}$. ◁

Отметим, что функция $y=ax^2+bx+c$ принимает *наименьшее* или *наибольшее значение* в точке $x_0=-\frac{b}{2a}$, которая является абсциссой вершины параболы.

Значение функции в точке x_0 можно найти по формуле $y_0=y(x_0)$. *Если $a>0$, то функция имеет наименьшее значение, а если $a<0$, то функция имеет наибольшее значение.*

Например, функция $y=x^2-4x+3$ при $x=2$ принимает наименьшее значение, равное -1 (рис. 44, *в*); функция $y=-2x^2+12x-9$ при $x=3$ принимает наибольшее значение, равное 9.

Задача 4 Сумма двух положительных чисел равна 6. Найти эти числа, если сумма их квадратов наименьшая. Каково наименьшее значение суммы квадратов этих чисел?

▶ Обозначим первое число буквой x, тогда второе число равно $6 - x$, а сумма их квадратов равна $x^2 + (6 - x)^2$. Преобразуем это выражение:

$$x^2 + (6 - x)^2 = x^2 + 36 - 12x + x^2 = \\ = 2x^2 - 12x + 36.$$

Задача свелась к нахождению наименьшего значения функции $y = 2x^2 - 12x + 36$. Найдем координаты вершины этой параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3,$$
$$y_0 = y(3) = 2 \cdot 9 - 12 \cdot 3 + 36 = 18.$$

Итак, при $x = 3$ функция принимает наименьшее значение, равное 18. Таким образом, первое число равно 3, второе также равно $6 - 3 = 3$. Значение суммы квадратов этих чисел равно 18.

Ответ 18. ◁

Упражнения

621 Найти координаты вершины параболы:
1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = x^2 + 3x + 5$;
3) $y = -x^2 - 2x + 5$; 4) $y = -x^2 + 5x - 1$.

622 Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:
1) $y = x^2 - 3x + 5$; 2) $y = -2x^2 - 8x + 10$;
3) $y = -2x^2 + 6$; 4) $y = 7x^2 + 14$.

623 По данному графику квадратичной функции (рис. 48) выяснить ее свойства.

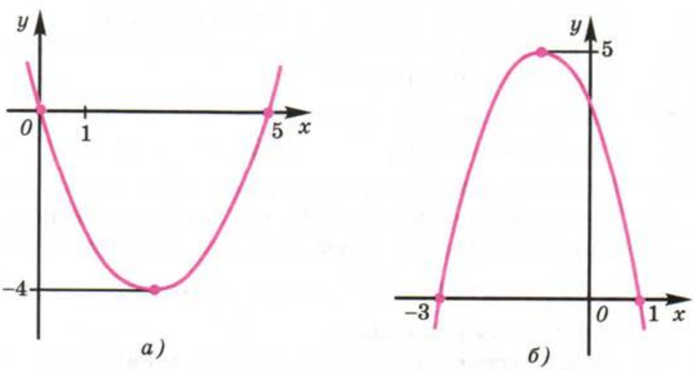


Рис. 48

Построить график функции и по графику: 1) найти значения x, при которых значения функции положительны; отрицательны; 2) найти промежутки возрастания и убывания функции; 3) выяснить, при каком значении x функция принимает наибольшее или наименьшее значение; найти его **(624—625)**.

624 1) $y = x^2 - 7x + 10$; 2) $y = -x^2 + x + 2$;
3) $y = -x^2 + 6x - 9$; 4) $y = x^2 + 4x + 5$.

625 1) $y = 4x^2 + 4x - 3$; 2) $y = -3x^2 - 2x + 1$;
3) $y = -2x^2 + 3x + 2$; 4) $y = 3x^2 - 8x + 4$;
5) $y = 4x^2 + 12x + 9$; 6) $y = -4x^2 + 4x - 1$;
7) $y = 2x^2 - 4x + 5$; 8) $y = -3x^2 - 6x - 4$.

626 Число 15 представить в виде суммы двух чисел так, чтобы произведение этих чисел было наибольшим.

627 Сумма двух чисел равна 10. Найти эти числа, если сумма их кубов является наименьшей.

628 Участок прямоугольной формы, примыкающий к стене дома, требуется огородить с трех сторон забором длиной 12 м. Какими должны быть размеры участка, чтобы площадь его была наибольшей?

629 В треугольнике сумма основания и высоты, опущенной на это основание, равна 14 см. Может ли такой треугольник иметь площадь, равную 25 см^2?

630 Не строя график, определить, при каком значении x квадратичная функция имеет наибольшее (наименьшее) значение; найти это значение:
1) $y = x^2 - 6x + 13$; 2) $y = x^2 - 2x - 4$;
3) $y = -x^2 + 4x + 3$; 4) $y = 3x^2 - 6x + 1$.

631 Определить знаки коэффициентов уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$, если:
1) ветви параболы направлены вверх, абсцисса ее вершины отрицательна, а ордината положительна;
2) ветви параболы направлены вниз, абсцисса и ордината ее вершины отрицательны.

632 Построить график функции:
1) $y = |2x^2 - x - 1|$; 2) $y = x^2 - 5|x| - 6$.

633 С высоты 5 м вертикально вверх из лука выпущена стрела с начальной скоростью 50 м/с. Высота h метров, на которой находится стрела через t секунд, вычисляется по формуле $h = h(t) = 5 + 50t - \frac{gt^2}{2}$, где g принять равным 10 м/с^2. Через сколько секунд стрела:
1) достигнет наибольшей высоты и какой;
2) упадет на землю?

Упражнения к главе V

634 Найти значения x, при которых квадратичная функция $y = 2x^2 - 5x + 3$ принимает значение, равное:
1) 0; 2) 1; 3) 10; 4) −1.

635 Найти координаты точек пересечения графиков функций:
1) $y = x^2 - 4$ и $y = 2x - 4$;
2) $y = x^2$ и $y = 3x - 2$;
3) $y = x^2 - 2x - 5$ и $y = 2x^2 + 3x + 1$;
4) $y = x^2 + x - 2$ и $y = (x+3)(x-4)$.

636 Решить неравенство:
1) $x^2 \leqslant 5$; 2) $x^2 > 36$.

637 Найти координаты точек пересечения параболы с осями координат:
1) $y = x^2 + x - 12$; 2) $y = -x^2 + 3x + 10$;
3) $y = -8x^2 - 2x + 1$; 4) $y = 7x^2 + 4x - 11$;
5) $y = 5x^2 + x - 1$; 6) $y = 5x^2 + 3x - 2$;
7) $y = 4x^2 - 11x + 6$; 8) $y = 3x^2 + 13x - 10$.

638 Найти координаты вершины параболы:
1) $y = x^2 - 4x - 5$; 2) $y = -x^2 - 2x + 3$;
3) $y = x^2 - 6x + 10$; 4) $y = x^2 + x + \frac{5}{4}$;
5) $y = -2x(x+2)$; 6) $y = (x-2)(x+3)$.

639 Построить график функции и по графику выяснить ее свойства:
1) $y = x^2 - 5x + 6$; 2) $y = x^2 + 10x + 30$;
3) $y = -x^2 - 6x - 8$; 4) $y = 2x^2 - 5x + 2$;
5) $y = -3x^2 - 3x + 1$; 6) $y = -2x^2 - 3x - 3$.

640 Не строя график функции, найти ее наибольшее или наименьшее значение:
1) $y = x^2 + 2x + 3$; 2) $y = -x^2 + 2x + 3$;
3) $y = -3x^2 + 7x$; 4) $y = 3x^2 + 4x + 5$.

641 Периметр прямоугольника 600 м. Какими должны быть его высота и основание, чтобы площадь прямоугольника была наибольшей?

Проверь себя!

1 Построить график функции $y=x^2-6x+5$ и найти ее наименьшее значение.

2 С помощью графика функции $y=-x^2+2x+3$ найти значения x, при которых значение функции равно 3.

3 По графику функции $y=1-x^2$ найти значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

4 На каких промежутках функция $y=2x^2$ возрастает? убывает? Построить график этой функции.

5 Найти координаты вершины параболы $y=(x-3)^2$ и построить ее график.

642 Прямоугольник разбит на 3 части двумя отрезками, концы которых лежат на противоположных сторонах прямоугольника, и параллельными одной из его сторон. Сумма периметра прямоугольника и длин отрезков равна 1600 м. Найти стороны прямоугольника, если его площадь наибольшая.

643 Найти коэффициенты p и q квадратичной функции $y=x^2+$ $+px+q$, если эта функция:

1) при $x=0$ принимает значение 2, а при $x=1$ — значение 3;

2) при $x=0$ принимает значение 0, а при $x=2$ — значение 6.

644 Найти p и q, если парабола $y=x^2+px+q$:

1) пересекает ось абсцисс в точках $x=2$ и $x=3$;

2) пересекает ось абсцисс в точке $x=1$ и ось ординат в точке $y=3$;

3) касается оси абсцисс в точке $x=2$.

645 При каких значениях x равны значения функций:

1) $y=x^2+3x+2$ и $y=|7-x|$;

2) $y=3x^2-6x+3$ и $y=|3x-3|$?

646 Построить параболу $y=ax^2+bx+c$, если известно, что:

1) парабола проходит через точки с координатами (0; 0), (2; 0), (3; 3);

2) точка (1; 3) является вершиной параболы, а точка (−1; 7) принадлежит параболе;

3) нулями функции $y=ax^2+bx+c$ являются числа $x_1=1$ и $x_2=3$, а наибольшее значение равно 2.

647 Найти значение k, при котором прямая $y=kx$ и парабола $y=x^2+4x+1$ имеют только одну общую точку.

648 Пусть прямая проходит через точку $(x_0;\ y_0)$ параболы $y=ax^2$ и точку $\left(\frac{x_0}{2};\ 0\right)$. Доказать, что эта прямая имеет только одну общую точку с параболой $y=ax^2$.

VI
глава

Квадратные неравенства

§ 40 Квадратное неравенство и его решение

Задача 1 Стороны прямоугольника равны 2 и 3 дм. Каждую сторону увеличили на одинаковое число дециметров так, что площадь прямоугольника стала больше 12 дм^2. Как изменилась каждая сторона?

▶ Пусть каждая сторона прямоугольника увеличена на x дециметров. Тогда стороны нового прямоугольника равны $(2+x)$ и $(3+x)$ дециметрам, а его площадь равна $(2+x)(3+x)$ квадратным дециметрам. По условию задачи $(2+x)(3+x)>12$, откуда $x^2+5x+6>12$, или $x^2+5x-6>0$.

Разложим левую часть этого неравенства на множители:

$$(x+6)(x-1)>0.$$

Так как по условию задачи $x>0$, то $x+6>0$. Поделив обе части неравенства на положительное число $x+6$, получим $x-1>0$, т. е. $x>1$.

Ответ Каждую сторону прямоугольника увеличили больше чем на 1 дм. ◁

В неравенстве $x^2+5x-6>0$ буквой x обозначено неизвестное число. Это пример квадратного неравенства.

Если в левой части неравенства стоит квадратный трехчлен, а в правой — нуль, то такое *неравенство* называют *квадратным*.

Например, неравенства

$$2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0, \quad -3x^2 + 4x + 5 < 0$$

являются квадратными.
Напомним, что *решением неравенства* с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство. *Решить неравенство* — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Задача 2 Решить неравенство $x^2 - 5x + 6 > 0$.

▶ Квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ имеет два различных корня $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Следовательно, квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 6$ можно разложить на множители:

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3).$$

Поэтому данное неравенство можно записать так:

$$(x-2)(x-3) > 0.$$

Произведение двух множителей положительно, если они имеют одинаковые знаки.
1) Рассмотрим случай, когда оба множителя положительны, т. е. $x - 2 > 0$ и $x - 3 > 0$. Эти два неравенства образуют систему:

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ x - 3 > 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $\begin{cases} x > 2, \\ x > 3, \end{cases}$ откуда $x > 3$.

2) Рассмотрим теперь случай, когда оба множителя отрицательны, т. е. $x - 2 < 0$ и $x - 3 < 0$. Эти два неравенства образуют систему:

$$\begin{cases} x - 2 < 0, \\ x - 3 < 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $\begin{cases} x < 2, \\ x < 3, \end{cases}$ откуда $x < 2$.

Таким образом, решениями неравенства

$$(x-2)(x-3) > 0,$$

а значит, и исходного неравенства

$$x^2 - 5x + 6 > 0$$

являются числа $x < 2$, а также числа $x > 3$.

Ответ $x < 2$, $x > 3$. ◁

Вообще если квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два различных корня, то решение квадратных неравенств $ax^2+bx+c>0$ и $ax^2+bx+c<0$ можно свести к решению системы неравенств первой степени, разложив левую часть квадратного неравенства на множители.

Задача 3 Решить неравенство $-3x^2-5x+2>0$.

▶ Чтобы удобнее проводить вычисления, представим данное неравенство в виде квадратного неравенства с положительным первым коэффициентом. Для этого умножим обе его части на -1:

$$3x^2+5x-2<0.$$

Найдем корни уравнения $3x^2+5x-2=0$:

$$x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6}=\frac{-5\pm7}{6},$$

$$x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=-2.$$

Разложив квадратный трехчлен на множители, получим:

$$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0.$$

Отсюда получаем две системы:

$$\begin{cases}x-\frac{1}{3}>0,\\ x+2<0;\end{cases}\qquad \begin{cases}x-\frac{1}{3}<0,\\ x+2>0.\end{cases}$$

Первую систему можно записать так:

$$\begin{cases}x>\frac{1}{3},\\ x<-2,\end{cases}$$

откуда видно, что она не имеет решений.

Решая вторую систему, находим:

$$\begin{cases}x<\frac{1}{3},\\ x>-2,\end{cases}$$

откуда $-2<x<\frac{1}{3}$.

Отсюда следует, что решениями неравенства $3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x+2)<0$, т. е. неравенства $-3x^2-5x+2>0$, являются все числа интервала $\left(-2;\ \frac{1}{3}\right)$.

Ответ $-2<x<\frac{1}{3}$. ◁

Упражнения

649 (Устно.) Указать, какие из следующих неравенств являются квадратными:

1) $x^2 - 4 > 0$;
2) $x^2 - 3x - 5 \leqslant 0$;
3) $3x + 4 > 0$;
4) $4x - 5 < 0$;
5) $x^2 - 1 \leqslant 0$;
6) $x^4 - 16 > 0$.

650 Свести к квадратным следующие неравенства:

1) $x^2 < 3x + 4$;
2) $3x^2 - 1 > x$;
3) $3x^2 < x^2 - 5x + 6$;
4) $2x(x+1) < x + 5$.

651 (Устно.) Какие из чисел 0; -1; 2 являются решениями неравенства:

1) $x^2 + 3x + 2 > 0$;
2) $-x^2 + 3{,}5x + 2 \geqslant 0$;
3) $x^2 - x - 2 \leqslant 0$;
4) $-x^2 + x + \frac{3}{4} < 0$?

Решить неравенство **(652—654)**.

652
1) $(x-2)(x+4) > 0$;
2) $(x-11)(x-3) < 0$;
3) $(x-3)(x+5) < 0$;
4) $(x+7)(x+1) > 0$.

653
1) $x^2 - 4 < 0$;
2) $x^2 - 9 > 0$;
3) $x^2 + 3x < 0$;
4) $x^2 - 2x > 0$.

654
1) $x^2 - 3x + 2 < 0$;
2) $x^2 + x - 2 < 0$;
3) $x^2 - 2x - 3 > 0$;
4) $x^2 + 2x - 3 > 0$;
5) $2x^2 + 3x - 2 > 0$;
6) $3x^2 + 2x - 1 > 0$.

655 Решить неравенство:

1) $2 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 > 0$;
2) $7 \cdot \left(\frac{1}{6} - x\right)^2 \leqslant 0$;
3) $3x^2 - 3 < x^2 - x$;
4) $(x-1)(x+3) > 5$.

656 Построить график функции:

1) $y = 2x^2$;
2) $y = -(x+1{,}5)^2$;
3) $y = 2x^2 - x + 2$;
4) $y = -3x^2 - x - 2$.

По графику найти все значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значения, равные нулю.

657 Известно, что числа x_1 и x_2, где $x_1 < x_2$, являются нулями функции $y = ax^2 + bx + c$. Доказать, что если число x_0 заключено между x_1 и x_2, т. е. $x_1 < x_0 < x_2$, то выполняется неравенство $a(ax_0^2 + bx_0 + c) < 0$.

658 Из трех последовательных натуральных чисел произведение первых двух меньше 72, а произведение последних двух не меньше 72. Найти эти числа.

§ 41 Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции

Напомним, что квадратичная функция задается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Поэтому решение квадратного неравенства можно свести к отысканию нулей квадратичной функции, если они имеются, и промежутков, на которых квадратичная функция принимает положительные или отрицательные значения.

Задача 1 Решить с помощью графика неравенство

$$2x^2 - x - 1 \leqslant 0.$$

▶ График квадратичной функции $y = 2x^2 - x - 1$ — парабола, ветви которой направлены вверх.

Выясним, имеет ли эта парабола точки пересечения с осью Ox, для чего решим квадратное уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4}; \quad x_1 = 1, \ x_2 = -\frac{1}{2}.$$

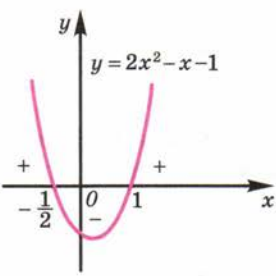


Рис. 49

Следовательно, парабола пересекает ось Ox в точках $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$ (рис. 49). Неравенству $2x^2 - x - 1 \leqslant 0$ удовлетворяют те значения x, при которых значения функции равны нулю или отрицательны, т. е. те значения x, при которых точки параболы лежат на оси Ox или ниже этой оси. Из рисунка 49 видно, что этими значениями являются все числа из отрезка $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.

Ответ $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$. ◁

График этой функции можно использовать и при решении других неравенств, которые отличаются от данного только знаком неравенства. Из рисунка 49 видно, что:

1) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 < 0$ являются числа интервала $-\frac{1}{2} < x < 1$;

2) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 > 0$ являются все числа промежутков $x < -\frac{1}{2}$ и $x > 1$;

3) решениями неравенства $2x^2 - x - 1 \geqslant 0$ являются все числа промежутков $x \leqslant -\frac{1}{2}$ и $x \geqslant 1$.

Задача 2 Решить неравенство $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

▶ Построим эскиз графика функции $y = 4x^2 + 4x + 1$. Ветви этой параболы направлены вверх. Уравнение $4x^2 + 4x + 1 = 0$ имеет один корень $x = -\frac{1}{2}$, поэтому парабола касается оси Ox в точке $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$. График этой функции изображен на рисунке 50. Для решения данного неравенства нужно установить, при каких значениях x значения функции положительны. Таким образом, неравенству $4x^2 + 4x + 1 > 0$ удовлетворяют те значения x, при которых точки параболы лежат выше оси Ox. Из рисунка 50 видно, что такими являются все действительные числа x, кроме $x = -0{,}5$.

Ответ $x \neq -0{,}5$. ◁

Из рисунка 50 видно также, что:

1) решениями неравенства $4x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$ являются все действительные числа;

2) неравенство $4x^2 + 4x + 1 \leqslant 0$ имеет одно решение $x = -\frac{1}{2}$;

3) неравенство $4x^2 + 4x + 1 < 0$ не имеет решений.

Эти неравенства можно решить устно, если заметить, что $4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2$.

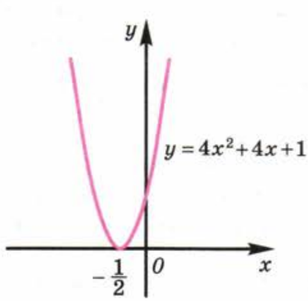


Рис. 50

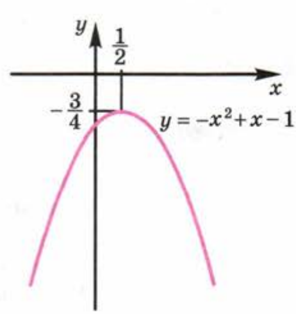


Рис. 51

Задача 3 Решить неравенство $-x^2+x-1<0$.

▶ Изобразим эскиз графика функции $y=-x^2+x-1$. Ветви этой параболы направлены вниз. Уравнение $-x^2+x-1=0$ не имеет действительных корней, поэтому парабола не пересекает ось Ox. Следовательно, эта парабола расположена ниже оси Ox (рис. 51). Это означает, что значения квадратичной функции при всех x отрицательны, т. е. неравенство $-x^2+x-1<0$ выполняется при всех действительных значениях x. ◁

Из рисунка 51 видно также, что решениями неравенства $-x^2+x-1 \leqslant 0$ являются все действительные значения x, а неравенства

$$-x^2+x-1>0 \quad \text{и} \quad -x^2+x-1 \geqslant 0$$

не имеют решений.

Итак, *для решения квадратичного неравенства с помощью графика* нужно:

1) определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента квадратичной функции;
2) найти действительные корни соответствующего квадратного уравнения или установить, что их нет;
3) изобразить эскиз графика квадратичной функции, используя точки пересечения (или касания) с осью Ox, если они есть;
4) по графику определить промежутки, на которых функция принимает нужные значения.

Упражнения

659 Построить график функции $y=x^2+x-6$. Определить по графику значения x, при которых функция принимает положительные значения; отрицательные значения.

Решить квадратное неравенство **(660—664)**.

660 1) $x^2-3x+2 \leqslant 0$; 2) $x^2-3x-4 \geqslant 0$;
3) $-x^2+3x-2<0$; 4) $-x^2+3x+4>0$.

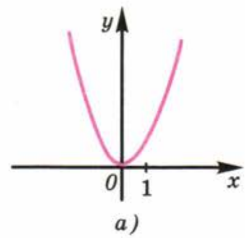
661 1) $2x^2+7x-4<0$; 2) $3x^2-5x-2>0$;
3) $-2x^2+x+1 \geqslant 0$; 4) $-4x^2+3x+1 \leqslant 0$.

662 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2-14x+49 \leqslant 0$;
3) $4x^2-4x+1 \geqslant 0$; 4) $4x^2-20x+25<0$;
5) $-9x^2-6x-1<0$; 6) $-2x^2+6x-4{,}5 \leqslant 0$.

663 1) $x^2-4x+6>0$; 2) $x^2+6x+10<0$;
3) $x^2+x+2>0$; 4) $x^2+3x+5<0$;
5) $2x^2-3x+7<0$; 6) $4x^2-8x+9>0$.

664 1) $5-x^2 \geqslant 0$; 2) $-x^2+7<0$;
3) $-2{,}1x^2+10{,}5x<0$; 4) $-3{,}6x^2-7{,}2x<0$;
5) $-6x^2-x+12>0$; 6) $-3x^2-6x+45<0$;
7) $-\frac{1}{2}x^2+4{,}5x-4>0$; 8) $-x^2-3x-2>0$.

665 (Устно.) Используя график функции $y=ax^2+bx+c$ (рис. 52), указать, при каких значениях x эта функция принимает положительные значения; отрицательные значения; значение, равное нулю.



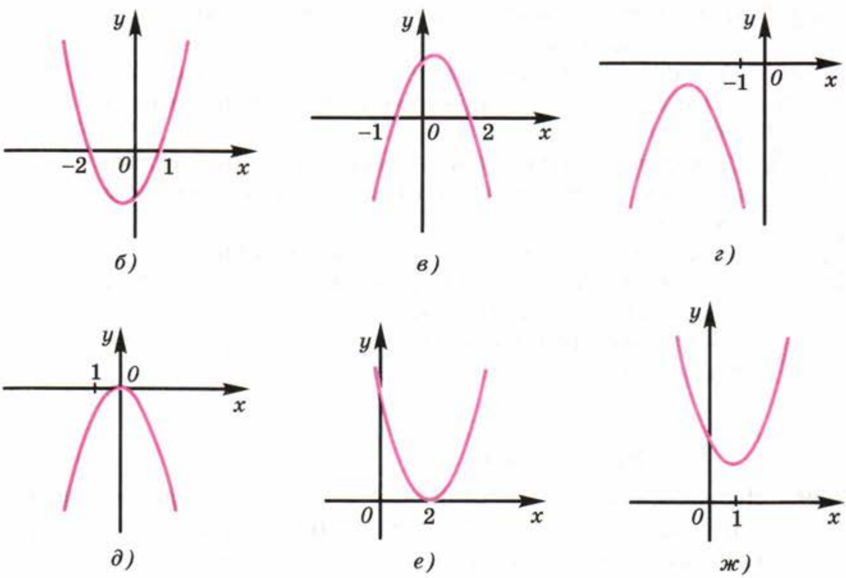


Рис. 52

666 (Устно.) Решить неравенство:
1) $x^2+10>0$; 2) $x^2+9<0$;
3) $(x-1)^2+1>0$; 4) $(x+5)^2+3<0$;
5) $-(x+1)^2-2<0$; 6) $-(x-2)^2-4>0$;
7) $0{,}5x^2+8 \leqslant 0$; 8) $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+21 \geqslant 0$.

Решить неравенство **(667—669)**.

667 1) $4x^2-9>0$; 2) $9x^2-25>0$;

3) $x^2-3x+2>0$; 4) $x^2-3x-4<0$;

5) $2x^2-4x+9\leqslant 0$; 6) $3x^2+2x+4\geqslant 0$;

7) $\frac{1}{2}x^2-4x\geqslant -8$; 8) $\frac{1}{3}x^2+2x\leqslant -3$.

668 1) $2x^2-8x\leqslant -8$; 2) $x^2+12x\geqslant -36$;

3) $9x^2+25<30x$; 4) $16x^2+1>8x$;

5) $2x^2-x\geqslant 0$; 6) $3x^2+x\leqslant 0$.

669 1) $x(x+1)<2(1-2x-x^2)$; 2) $x^2+2<3x-\frac{1}{8}x^2$;

3) $6x^2+1\leqslant 5x-\frac{1}{4}x^2$; 4) $2x(x-1)<3(x+1)$;

5) $\frac{5}{3}x-\frac{1}{6}x^2\leqslant x+1$; 6) $\frac{1}{6}x^2+\frac{2}{3}\geqslant x-1$.

670 Найти все значения x, при которых функция принимает значения, не большие нуля:

1) $y=-x^2+6x-9$; 2) $y=x^2-2x+1$;

3) $y=-\frac{1}{2}x^2-3x-4\frac{1}{2}$; 4) $y=-\frac{1}{3}x^2-4x-12$.

671 Показать, что при $q>1$ решениями неравенства $x^2-2x+q>0$ являются все действительные значения x.

672 Найти все значения r, при которых неравенство

$$x^2-(2+r)x+4>0$$

выполняется при всех действительных значениях x.

673 Найти все значения r, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство

$$(r^2-1)x^2+2(r-1)x+2>0.$$

§ 42 Метод интервалов

При решении неравенств часто применяется *метод интервалов*. Поясним этот метод на примерах.

Задача 1 Выяснить, при каких значениях x квадратный трехчлен x^2-4x+3 принимает положительные значения, а при каких — отрицательные.

▶ Найдем корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 3.$$

Поэтому $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Точки $x = 1$ и $x = 3$ (рис. 53) разбивают числовую ось на три промежутка:

$$x < 1, 1 < x < 3 \text{ и } x > 3.$$

Двигаясь вдоль числовой оси справа налево, видим, что на интервале $x > 3$ трехчлен $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ принимает положительные значения, так как в этом случае оба множителя $x - 1$ и $x - 3$ положительны.

На следующем интервале $1 < x < 3$ этот трехчлен принимает отрицательные значения и, таким образом, при переходе через точку $x = 3$ меняет знак. Это происходит потому, что в произведении $(x-1)(x-3)$ при переходе через точку $x = 3$ первый множитель $x - 1$ не меняет знак, а второй $x - 3$ меняет знак.

При переходе через точку $x = 1$ трехчлен снова меняет знак, так как в произведении $(x-1)(x-3)$ первый множитель $x - 1$ меняет знак, а второй $x - 3$ не меняет.

Итак, при движении по числовой оси справа налево от одного интервала к соседнему знаки произведения $(x-1)(x-3)$ чередуются.

Таким образом, задачу о знаке квадратного трехчлена $x^2 - 4x + 3$ можно решить следующим *способом*.

Отмечаем на числовой оси корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ — точки $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Они разбивают числовую ось (рис. 53) на три интервала. Заметив, что при $x > 3$ значения трехчлена $x^2 - 4x + 3$ положительны, расставляем его знаки на остальных интервалах в порядке чередования (рис. 54).

Из рисунка 54 видно, что $x^2 - 4x + 3 > 0$ при $x < 1$ и $x > 3$, а $x^2 - 4x + 3 < 0$ при $1 < x < 3$. ◁

Рис. 53

Рис. 54

Рассмотренный способ называют *методом интервалов*. Этот метод используется при решении квадратных и некоторых других неравенств.
Например, решая задачу 1, мы практически решили методом интервалов неравенства

$$x^2 - 4x + 3 > 0 \text{ и } x^2 - 4x + 3 < 0.$$

Задача 2 Решить неравенство $x^3 - x < 0$.

▶ Разложим многочлен $x^3 - x$ на множители:

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1).$$

Следовательно, неравенство можно записать так:

$$(x+1)\,x(x-1) < 0.$$

Отметим на числовой оси точки -1, 0 и 1. Эти точки разбивают числовую ось на четыре интервала (рис. 55):

$$x < -1, \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{и} \quad x > 1.$$

При $x > 1$ все множители произведения

$$(x+1)\,x(x-1)$$

положительны, и поэтому $(x+1)\,x(x-1) > 0$ на интервале $x > 1$. Учитывая смену знака произведения при переходе к соседнему интервалу, найдем для каждого интервала знак произведения $(x+1)\,x(x-1)$ (рис. 56).
Таким образом, решениями неравенства являются все значения x из интервалов $x < -1$ и $0 < x < 1$.

Ответ $x < -1$, $0 < x < 1$. ◁

Задача 3 Решить неравенство $(x^2 - 9)(x+3)(x-2) > 0$.

▶ Данное неравенство можно записать в виде

$$(x+3)^2\,(x-2)(x-3) > 0. \qquad (1)$$

Так как $(x+3)^2 > 0$ при всех $x \neq -3$, то при $x \neq -3$ множества решений неравенства (1) и неравенства

$$(x-2)(x-3) > 0 \qquad (2)$$

совпадают.
Значение $x = -3$ не является решением неравенства (1), так как при $x = -3$ левая часть неравенства равна 0.

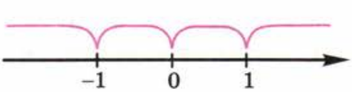


Рис. 55

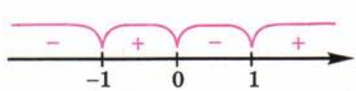


Рис. 56

Рис. 57

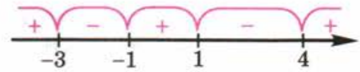


Рис. 58

Решая неравенство (2) методом интервалов (рис. 57), получаем $x < 2$, $x > 3$.
Учитывая, что $x = -3$ не является решением исходного неравенства, окончательно получаем:

Ответ $x < -3$, $-3 < x < 2$, $x > 3$. ◁

Задача 4 Решить неравенство $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x - 4} \geqslant 0$.

▶ Разложив числитель и знаменатель дроби на множители, получим:

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-4)} \geqslant 0. \qquad (3)$$

Отметим на числовой оси точки -3; -1; 1; 4, в которых числитель или знаменатель дроби обращается в нуль. Эти точки разбивают числовую прямую на пять интервалов (рис. 58). При $x > 4$ все множители числителя и знаменателя дроби положительны, и поэтому дробь положительна. При переходе от одного интервала к следующему дробь меняет знак, поэтому можно расставить знаки дроби так, как это показано на рисунке 58. Значения $x = -3$ и $x = 1$ удовлетворяют неравенству (3), а при $x = -1$ и $x = 4$ дробь не имеет смысла. Таким образом, исходное неравенство имеет следующие решения:

Ответ $x \leqslant -3$, $-1 < x \leqslant 1$, $x > 4$. ◁

Упражнения

674 (Устно.) Показать, что значение $x = 5$ является решением неравенства:
1) $(x-1)(x-2) > 0$; 2) $(x+2)(x+5) > 0$;
3) $(x-7)(x-10) > 0$; 4) $(x+1)(x-4) > 0$.

Решить методом интервалов неравенство **(675—682)**.

675 1) $(x+2)(x-7) > 0$; 2) $(x+5)(x-8) < 0$;
3) $(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right) < 0$; 4) $(x+5)\left(x-3\frac{1}{2}\right) > 0$.

676 1) $x^2 + 5x > 0$; 2) $x^2 - 9x > 0$; 3) $2x^2 - x < 0$;
4) $x^2 + 3x < 0$; 5) $x^2 + x - 12 < 0$; 6) $x^2 - 2x - 3 > 0$.

677 1) $x^3 - 16x < 0$; 2) $4x^3 - x > 0$;
3) $(x^2 - 1)(x+3) < 0$; 4) $(x^2 - 4)(x-5) > 0$.

678 1) $(x-5)^2(x^2-25)>0$; 2) $(x+7)^2(x^2-49)<0$;
3) $(x-3)(x^2-9)<0$; 4) $(x-4)(x^2-16)>0$;
5) $(x-8)(x-1)(x^2-1)\geqslant 0$; 6) $(x-5)(x+2)(x^2-4)\leqslant 0$.

679 1) $\frac{x-2}{x+5}>0$; 2) $\frac{x-4}{x+3}<0$; 3) $\frac{1{,}5-x}{3+x}\geqslant 0$; 4) $\frac{3{,}5+x}{x-7}\leqslant 0$;
5) $\frac{(2x+1)(x+2)}{x-3}<0$; 6) $\frac{(x-3)(2x+4)}{x+1}\geqslant 0$.

680 1) $\frac{x^2-2x+3}{(x-2)^2}\leqslant 0$; 2) $\frac{(x+4)^2}{2x^2-3x+1}\geqslant 0$;
3) $\frac{x^2-x}{x^2-4}>0$; 4) $\frac{9x^2-4}{x-2x^2}<0$;
5) $(x^2-5x+6)(x^2-1)>0$; 6) $(x+2)(x^2+x-12)>0$.

681 1) $(x^2-7x+12)(x^2-x+2)\leqslant 0$;
2) $(x^2-3x-4)(x^2-2x-15)\leqslant 0$;
3) $\frac{x^2-x-12}{x-1}>0$; 4) $\frac{x^2-4x-12}{x-2}<0$;
5) $\frac{x^2+3x-10}{x^2+x-2}\leqslant 0$; 6) $\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-6}\geqslant 0$.

682 1) $\frac{x}{x-2}+\frac{3}{x}>\frac{3}{x-2}$; 2) $\frac{x^2}{x^2+3x}+\frac{2-x}{x+3}<\frac{5-x}{x}$;
3) $\frac{x^2-7x-8}{x^2-64}<0$; 4) $\frac{x^2+7x+10}{x^2-4}>0$;
5) $\frac{5x^2-3x-2}{1-x^2}\geqslant 0$; 6) $\frac{x^2-16}{2x^2+5x-12}>0$.

§ 43* Исследование квадратичной функции

Напомним, что квадратичная функция — это функция, заданная формулой $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — заданные действительные числа, причем $a\neq 0$, x — действительная переменная. Эту функцию можно также задать следующей формулой:

$$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}. \quad (1)$$

Графиком этой функции является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = y(x_0) = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \qquad (2)$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом и обозначают буквой D, т. е.

$$D = b^2 - 4ac. \qquad (3)$$

Поэтому формулы (1) и (2) можно записать так:

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}, \qquad (4)$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = -\frac{D}{4a}. \qquad (5)$$

Из формулы (4) видно, что знак квадратичной функции зависит от знаков чисел a и D.

Теорема 1. Если $D < 0$, то при всех действительных значениях x знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком числа a.

● Воспользуемся следующей формулой:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-D}{4a^2}\right). \qquad (6)$$

Выражение в квадратных скобках является положительным при всех действительных значения x, так как $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, $-D > 0$, $a^2 > 0$. Поэтому при $D < 0$ знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком числа a при всех значениях x. ○

В этом случае при $a > 0$, $D < 0$ вершина параболы лежит выше оси Ox, так как ее ордината $y_0 = -\frac{D}{4a} > 0$ (рис. 59), ветви параболы направлены вверх и вся парабола также лежит выше оси Ox. На рисунках 59—64 координаты вершины параболы $x_0 = m$, $y_0 = l$.

В случае $a < 0$, $D < 0$ вершина параболы лежит ниже оси Ox, ветви параболы направлены вниз и вся парабола лежит ниже оси Ox (рис. 60). Справедливы и обратные утверждения: вся парабола (6) лежит выше оси Ox только при $a > 0, D < 0$ и ниже оси Ox только при $a < 0$, $D < 0$.

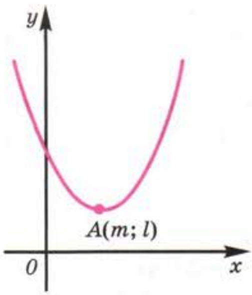


Рис. 59

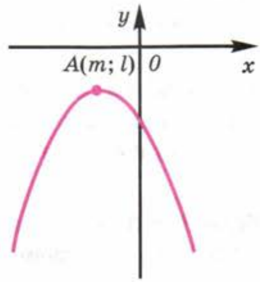


Рис. 60

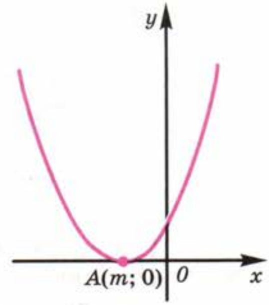


Рис. 61

Задача 1 При каких значениях p вся парабола $y = px^2 + px + 1$ лежит выше оси Ox?

▶ Данная парабола лежит выше оси Ox, если $p > 0$ и $D = p^2 - 4p < 0$. Дискриминант $D = p(p-4)$ меньше нуля только при $p < 4$, так как $p > 0$.

Ответ $0 < p < 4$. ◁

Теорема 2. Если $D = 0$, то при всех действительных значениях x, кроме $x = -\frac{b}{2a}$, знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком числа a; при $x = -\frac{b}{2a}$ значение квадратичной функции равно нулю.

● Если $D = 0$, то формула (6) принимает вид

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \tag{7}$$

Если $x \neq -\frac{b}{2a}$, то $y > 0$ при $a > 0$ и $y < 0$ при $a < 0$; если $x = -\frac{b}{2a}$, то $y = 0$. ○

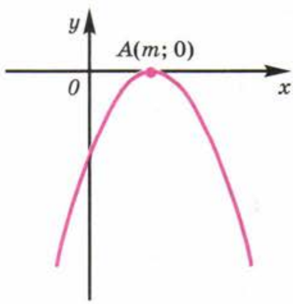


Рис. 62

В этом случае при $a > 0$, $D = 0$ вершина параболы лежит на оси Ox, ветви параболы направлены вверх и вся парабола, кроме ее вершины, лежит выше оси Ox (рис. 61). В случае $a < 0$, $D = 0$ вершина параболы также лежит на оси Ox, ветви параболы направлены вниз и вся парабола, кроме ее вершины, лежит ниже оси Ox (рис. 62). Справедливы и обратные утверждения: вся парабола, кроме ее вершины, лежит выше оси Ox только при $a > 0$, $D = 0$ и ниже оси Ox только при $a < 0$, $D = 0$.

Задача 2 Показать, что при $p = \pm 4$ парабола $y = -2x^2 + px - 2$ лежит ниже оси Ox, кроме ее вершины, лежащей на оси Ox.

▶ Так как $-2 < 0$, то по теореме 2 дискриминант $D = p^2 - 16$ должен быть равен нулю. В самом деле, при $p = \pm 4$ дискриминант $D = (\pm 4)^2 - 16 = 0$. ◁

Теорема 3. Если $D > 0$, то знак квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ совпадает со знаком числа a для всех x, лежащих вне отрезка $[x_1; x_2]$, т. е. при $x < x_1$ и при $x > x_2$, где $x_1 < x_2$ — нули функции; знак квадратичной функции противоположен знаку числа a при $x_1 < x < x_2$.

● Так как $D > 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня x_1 и x_2, где $x_1 < x_2$, поэтому

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если $x < x_1$ или $x > x_2$, то $(x - x_1)(x - x_2) > 0$ и знак функции совпадает со знаком числа a; если $x_1 < x < x_2$, то $(x - x_1)(x - x_2) < 0$ и знак функции противоположен знаку числа a. ○

В этом случае если $a > 0$, $D > 0$, то вершина параболы лежит ниже оси Ox, так как ее ордината $y_0 = -\frac{D}{a} < 0$, ветви параболы направлены вверх, парабола лежит ниже оси Ox при $x_1 < x < x_2$, пересекает ось Ox в точках x_1 и x_2 и лежит выше оси Ox при $x < x_1$ и при $x > x_2$ (рис. 63).

Если $a < 0$, $D > 0$, то вершина параболы лежит выше оси Ox ($y_0 < 0$), ее ветви направлены вниз, парабола лежит выше оси Ox при $x_1 < x < x_2$, пересе-

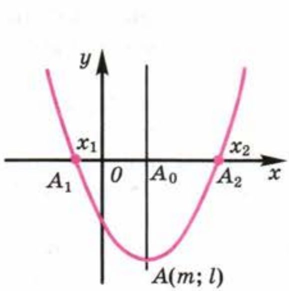


Рис. 63

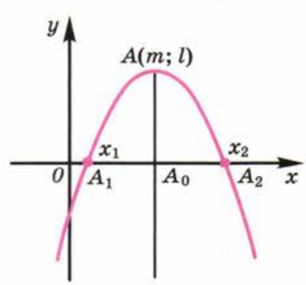


Рис. 64

кает ось Ox в точках x_1, x_2 и лежит ниже оси Ox при $x < x_1$ и при $x > x_2$ (рис. 64).

Задача 3 При каких значениях p функция $y = 4x^2 + px + 1$ принимает как положительные, так и отрицательные значения?

▶ По теореме 3 условия задачи означают, что $D = p^2 - 16 > 0$, откуда $-4 < p < 4$. ◁

Задача 4 Найти условия, при которых квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, бóльшие единицы.

▶ Из формулы корней квадратного уравнения

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

следует, что корни действительны, если $D \geqslant 0$.

Рассмотрим числа $x_1 - 1$ и $x_2 - 1$. Они положительны только тогда, когда их сумма и произведение положительны, т. е.

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) > 0, \ (x_1 - 1)(x_2 - 1) > 0,$$

откуда $x_1 + x_2 > 2$, $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0$. Используя теорему Виета, получаем $-\frac{b}{a} > 2$, $\frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1 > 0$.

Но если $x_1 - 1 > 0$, $x_2 - 1 > 0$, то $x_1 > 1$, $x_2 > 1$.

Ответ $b^2 - 4ac \geqslant 0$, $\frac{b}{a} > -2$, $\frac{c}{a} + \frac{b}{a} + 1 > 0$. ◁

Задача 5 Найти условия, при которых квадратный трехчлен $x^2 - (a + b)x + (a - b)^2$ является полным квадратом.

▶ По формуле (7) из доказательства теоремы 2 трехчлен $Ax^2 + Bx + C$ является полным квадратом, если дискриминант $D = B^2 - 4AC = 0$ и $A > 0$. В данном случае $A = 1 > 0$, $D = (a + b)^2 - 4(a - b)^2 = 0$, откуда

$$\begin{gathered} a^2 + 2ab + b^2 - 4a^2 + 8ab - 4b^2 = 0, \\ 3a^2 - 10ab + 3b^2 = 0, \qquad (8) \\ 3a^2 - 9ab - ab + 3b^2 = 0, \\ 3a(a - 3b) - b(a - 3b) = 0, \quad (a - 3b)(3a - b) = 0. \end{gathered}$$

Это означает, что или $a = 3b$, или $b = 3a$. ◁

Найденные условия можно было также получить из равенства (8), рассматривая его как квадратное уравнение относительно a:

$$a_{1,2} = \frac{10b \pm \sqrt{100b^2 - 36b^2}}{6} = \frac{10b \pm 8b}{6},$$

$$a_1 = 3b, \quad a_2 = \frac{1}{3}b.$$

Упражнения

683 Доказать, что квадратичная функция $y(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, имеет действительные нули x_1 и x_2 такие, что $x_1<M$, $x_2<M$, где M — заданное число, только тогда, когда выполняются условия

$$b^2-4ac\geqslant 0,\quad -\frac{b}{2a}<M,\quad ay(M)>0.$$

684 Доказать, что квадратичная функция $y(x)=ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$, имеет действительные нули x_1 и x_2 такие, что $K<x_1<M$, $K<x_2<M$, где K и M — заданные числа, только тогда, когда выполняются условия

$$b^2-4ac\geqslant 0,\quad K<-\frac{b}{2a}<M,\quad ay(M)>0,\quad ay(K)>0.$$

685 Найти все действительные значения b, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+2bx+4b=0$ действительные и такие, что $x_1>-1$, $x_2>-1$.

686 Найти все действительные значения b, при которых корни уравнения $x^2-bx+2=0$ действительные и принадлежат интервалу (0; 3).

Упражнения к главе VI

Решить неравенство **(687—691)**.

687 1) $(x-5{,}7)(x-7{,}2)>0$; 2) $(x-3)(x-4)>0$;
3) $(x-2{,}5)(3-x)<0$; 4) $(x-3)(4-x)<0$;
5) $x^2>x$; 6) $x^2>36$; 7) $4>x^2$; 8) $\frac{9}{16}\geqslant x^2$.

688 1) $-9x^2+1\leqslant 0$; 2) $-4x^2+1\geqslant 0$;
3) $-5x^2-x\geqslant 0$; 4) $-3x^2+x\leqslant 0$;
5) $-2x^2+4x+30<0$; 6) $-2x^2+9x-4>0$;
7) $4x^2+3x-1<0$; 8) $2x^2+3x-2<0$.

689 1) $6x^2+x-1>0$; 2) $5x^2-9x+4>0$;
3) $x^2-2x+1\geqslant 0$; 4) $x^2+10x+25>0$;
5) $-x^2+6x-9<0$; 6) $-4x^2-12x-9<0$.

690 1) $x^2-3x+8>0$; 2) $x^2-5x+10<0$;
3) $2x^2-3x+5\geqslant 0$; 4) $3x^2-4x+5\leqslant 0$;
5) $-x^2+2x+4\leqslant 0$; 6) $-4x^2+7x-5>0$.

691 1) $(x-2)(x^2-9)>0$; 2) $(x^2-1)(x+4)<0$;
3) $\frac{(x+3)(x-5)}{x+1}\leqslant 0$; 4) $\frac{x-7}{(4-x)(2x+1)}\geqslant 0$;
5) $\frac{4x^2-4x-3}{x+3}\geqslant 0$; 6) $\frac{2x^2-3x-2}{x-1}<0$.

Проверь себя!

1 Решить неравенство:
1) $x^2-3x-4<0$; 2) $3x^2-4x+8\geqslant 0$;
3) $-x^2+3x-5>0$; 4) $x^2+20x+100\leqslant 0$.

2 Решить методом интервалов неравенство

$$x(x-1)(x+2)\geqslant 0.$$

Решить неравенство **(692—696)**.

692 1) $x^2>2-x$; 2) $x^2-5<4x$;
3) $x+8<3x^2-9$; 4) $x^2\leqslant 10-3x$;
5) $10x-12<2x^2$; 6) $3-7x\leqslant 6x^2$.

693 1) $x^2+4<x$; 2) $x^2+3>2x$; 3) $-x^2+3x\leqslant 4$;
4) $-x^2-5x\geqslant 8$; 5) $3x^2-5>2x$; 6) $2x^2+1<3x$;
7) $\frac{x^2}{10}+2\leqslant\frac{7x}{10}$; 8) $\frac{x^2}{3}-\frac{2x}{3}>\frac{3x-10}{4}$.

694 1) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}x^2\geqslant 1-x$; 2) $\frac{1}{3}x(x+1)\leqslant(x-1)^2$;
3) $x(1-x)>1{,}5-x$; 4) $\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}\geqslant x(x-1)$;
5) $x\left(\frac{x}{4}-1\right)\leqslant x^2+x+1$; 6) $2x-2{,}5>x(x-1)$.

695 1) $\frac{2}{x-\sqrt{2}}>\frac{3}{x+\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{3-x^2}<\frac{2}{\sqrt{3}-x}$;
3) $\frac{9}{2x+2}+\frac{x}{x-1}\geqslant\frac{1-3x}{2-2x}$; 4) $\frac{3}{x^2-1}-\frac{1}{2}<\frac{3}{2x-2}$.

696 1) $\frac{3x^2-5x-8}{2x^2-5x-3}>0$; 2) $\frac{4x^2+x-3}{5x^2+9x-2}<0$;
3) $\frac{2+7x-4x^2}{3x^2+2x-1}\leqslant 0$; 4) $\frac{2+9x-5x^2}{3x^2-2x-1}\geqslant 0$.

697 Катер должен не более чем за 4 ч пройти по течению реки 22,5 км и вернуться обратно. С какой скоростью относительно воды должен идти катер, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

698 В одной системе координат построить графики функций и выяснить, при каких x значения одной функции больше (меньше) значений другой, результат проверить, решив соответствующее неравенство:

1) $y = 2x^2, \quad y = 2 - 3x;$
2) $y = x^2 - 2, \quad y = 1 - 2x;$
3) $y = x^2 - 5x + 4, \quad y = 7 - 3x;$
4) $y = 3x^2 - 2x + 5, \quad y = 5x + 3;$
5) $y = x^2 - 2x, \quad y = -x^2 + x + 5;$
6) $y = 2x^2 - 3x + 5, \quad y = x^2 + 4x - 5.$

699 Решить неравенство:

1) $\dfrac{x^4 - 5x^2 - 36}{x^2 + x - 2} \geqslant 0;$ 2) $\dfrac{x^4 + 4x^2 - 5}{x^2 + 5x + 6} \leqslant 0;$

3) $\dfrac{x^4 - x^2 - 2}{x^4 + x^2 - 2} < 0;$ 4) $\dfrac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^4 - 2x^2 - 3} > 0.$

700 Найти четыре последовательных целых числа такие, что куб второго из них больше произведения трех остальных.

Упражнения для повторения курса алгебры VIII класса

701 Вычислить:

1) $\frac{27}{32} \cdot \frac{8}{162} \cdot \frac{72}{69}$; 2) $\frac{38}{147} \cdot \frac{91}{152} : \frac{65}{264}$;

3) $\left(\frac{5}{8} + \frac{7}{12}\right) \cdot \left(3\frac{23}{58} - 2\frac{9}{58}\right)$; 4) $\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{9}\right) \cdot \left(2\frac{23}{56} - 3\frac{15}{56}\right)$;

5) $34{,}17 : 1{,}7 + \left(2\frac{3}{4} + 0{,}15\right) : \frac{4}{5} - 23\frac{3}{8}$;

6) $5{,}86 - 3\frac{5}{6} \cdot \frac{15}{23} + \frac{15}{28} : 4\frac{2}{7}$;

7) $\dfrac{12\frac{4}{5} \cdot 3\frac{3}{4} - 4\frac{4}{11} \cdot 4\frac{1}{8}}{11\frac{2}{3} \cdot 2\frac{4}{7}}$; 8) $\dfrac{5\frac{1}{7} \cdot 5\frac{1}{4} + 5\frac{5}{8} \cdot 3\frac{1}{5}}{10\frac{5}{13} : 1\frac{1}{26}}$.

702 Решить уравнение:

1) $(x-9)(2-x)=0$; 2) $(x+4)(3-x)=0$;
3) $2x^2 - x = 0$; 4) $3x^2 + 5x = 0$;
5) $1 - 4x^2 = 0$; 6) $9x^2 - 4 = 0$;
7) $\frac{5x^2 - x}{x} = 0$; 8) $\frac{3x^2 + x}{x} = 0$.

703 Доказать, что если $x > \frac{1}{2}$ и $y > 4$, то:

1) $4x + 3y > 14$; 2) $2xy - 3 > 1$;
3) $x^2 y > 1$; 4) $x^3 + y^2 > 16$.

704 (Устно.) Найти наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $n \leqslant -7$; 2) $n < -3{,}6$; 3) $n \leqslant 4{,}8$; 4) $n \leqslant -5{,}6$.

705 (Устно.) Найти наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству:

1) $n > -12$; 2) $n \geqslant -5{,}2$; 3) $n \geqslant 8{,}1$; 4) $n \geqslant -8{,}1$.

706 Решить неравенство:

1) $x + 4 > 3 - 2x$; 2) $5(y+2) \geqslant 8 - (2 - 3y)$;

3) $2(0{,}4 + x) - 2{,}8 \geqslant 2{,}3 + 3x$; 4) $7(x+5) + 10 > 17$;

5) $\frac{3-x}{2} + \frac{x}{4} > 7$; 6) $\frac{x}{6} - \frac{2-x}{3} \leqslant 5$.

707 Какие целые значения может принимать x, если:

1) $0 \leqslant x \leqslant 7{,}2$; 2) $-5\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$;

3) $4 < \frac{1}{3}x < 5$; 4) $11 < 3x < 13$?

708 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} 0{,}3x - 0{,}5y = 1, \\ 0{,}5x + 0{,}2y = 5{,}8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2(x+y) = (x-y) + 5, \\ 3(x+y) = (x-y) + 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{y}{2} + 1, \\ \frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - \frac{y}{2} = \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = 1; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6, \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{3} = 1; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 5, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1; \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 4x - 9y = -24, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$

709 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5x - 2 \geqslant 6x - 1, \\ 4 - 3x > 2x - 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7(x+1) - 2x > 9 - 4x, \\ 3(5 - 2x) - 1 \geqslant 4 - 5x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 12x - 3(x+2) \geqslant 7x - 5, \\ 13x + 6 \leqslant (x-5) \cdot 2 + 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \frac{4x-5}{7} < \frac{3x-8}{4}, \\ \frac{6-x}{5} - 1 < \frac{14x-3}{2}. \end{cases}$

710 Найти целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} \frac{2x-5}{4} - 2 \leqslant \frac{3-x}{3}, \\ \frac{5x+1}{5} > \frac{4-x}{4}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{10x-1}{3} - \frac{2-5x}{4} < \frac{5-3x}{6}, \\ \frac{2x+1}{2} \geqslant \frac{3+7x}{4} - \frac{5+4x}{5}. \end{cases}$

711 Решить уравнение:

1) $|x - 2| = 3{,}4$; 2) $|3 - x| = 5{,}1$; 3) $|2x + 1| = 5$;

4) $|1 - 2x| = 7$; 5) $|3x + 2| = 5$; 6) $|7x - 3| = 3$.

712 Решить неравенство:

1) $|x - 2| \leqslant 5{,}4$; 2) $|x - 2| \geqslant 5{,}4$; 3) $|2 - x| < 5{,}4$;

4) $|3x + 2| \geqslant 5$; 5) $|2x + 3| < 5$; 6) $|3x - 2{,}8| \geqslant 3$.

713 Найти погрешность приближения:

1) числа 0,2781 числом 0,278;

2) числа −2,154 числом −2,15;

3) числа $-\frac{7}{18}$ числом $-\frac{1}{3}$;

4) числа $\frac{3}{11}$ числом 0,272.

714 Доказать, что число 3,5 есть приближенное значение числа 3,5478 с точностью до 0,05.

715 Найти относительную погрешность приближения числа $\frac{7}{9}$ числом 0,777.

716 Представить бесконечную периодическую десятичную дробь в виде обыкновенной:

1) 0,(7); 2) 1,(3); 3) 2,(31); 4) 0,(52); 5) 1,1(3); 6) 2,3(7).

717 Сравнить числа:

1) $\sqrt{23}$ и 5; 2) 3,1 и $\sqrt{10}$;

3) $\sqrt{0{,}0361}$ и 0,19; 4) $\sqrt{7{,}3}$ и 2,7.

718 При каких значениях a верно равенство:

1) $\sqrt{a+1}=2$; 2) $\sqrt{3-2a}=5$;

3) $2\sqrt{\frac{1}{6}a-2}=1$; 4) $\frac{1}{3}\sqrt{7a-4}=0$?

719 Вычислить:

1) $(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}+2)$; 2) $(3\sqrt{5}+1)(1-3\sqrt{5})$.

720 Разложить на множители по образцу

$$a^2-7=(a-\sqrt{7})(a+\sqrt{7}):$$

1) a^2-13; 2) $15-b^2$; 3) x^2-80; 4) $\frac{18}{41}-x^2$.

721 Вычислить:

1) $\sqrt{10}\cdot\sqrt{160}$; 2) $\sqrt{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{\frac{1}{5}}$; 3) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{11}\cdot\sqrt{33}$;

4) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{3}$; 5) $(3\sqrt{12}+2\sqrt{3})^2$; 6) $(2\sqrt{2}-3\sqrt{32})^2$.

722 Найти объем прямоугольного параллелепипеда, если высота его $\sqrt{12{,}5}$ см, ширина $\sqrt{5}$ см, длина $\sqrt{10}$ см.

723 Площадь одного квадрата равна 7,68 м^2, площадь другого 300 дм^2. Во сколько раз сторона первого квадрата больше стороны второго квадрата?

724 Вынести множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt{16xy^2}$, где $x\geqslant 0$, $y<0$; 2) $\sqrt{45x^3y^5}$, где $x<0$, $y<0$.

725 Упростить:

1) $\sqrt{3}-5\sqrt{108}+\frac{1}{2}\sqrt{12}$; 2) $-\frac{1}{2}\sqrt{72}+4\sqrt{0{,}08}-2\sqrt{2}$.

726 Вычислить:

1) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{153}}{\sqrt{17}}+(\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{125}):2\sqrt{5}$;

2) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{304}}{\sqrt{19}}+\frac{\sqrt{1331}}{\sqrt{11}}$.

727 Упростить выражение:

1) $2\sqrt{18}+3\sqrt{8}+3\sqrt{32}-\sqrt{50}$;

2) $3\sqrt{20}-\sqrt{45}+3\sqrt{18}+\sqrt{72}-\sqrt{80}$;

3) $5\sqrt{a}-3\sqrt{4a}+2\sqrt{9a}$, где $a>0$;

4) $\sqrt{x^3}+\frac{1}{2}\sqrt{36x^3}-\frac{2x}{3}\sqrt{9x}$, где $x>0$.

728 Упростить выражение:

1) $\left(\frac{x}{y-x}-\frac{x}{y+x}\right)\cdot\frac{(x+y)^2}{2x^2}$;

2) $\left(\frac{1}{a-1}-1-\frac{1}{a+1}\right)\cdot(a^2-1)$;

3) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{ab}{a-b}$;

4) $(a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right):\frac{a^2-b^2}{a^2b^2}$.

Решить уравнение (729—731).

729 1) $3(x+1)(x+2)-(3x-4)(x+2)=36$;

2) $2(3x-1)(2x+5)-6(2x-1)(x+2)=48$;

3) $\frac{5y-4}{2}=\frac{16y+1}{7}$;

4) $\frac{19+3x}{8}-\frac{1-9x}{5}=0$;

5) $\frac{x+(x-5)}{2}=11$;

6) $\frac{2x-(3-x)}{2}=3\frac{3}{8}$.

730 1) $x^2=7$; 2) $x^2=11$; 3) $x^2+6x=0$;

4) $x^2+5x=0$; 5) $x^2=8x$; 6) $x^2=12x$.

731 1) $1{,}5x-4x^2=6{,}3x-x^2$;

2) $11y-15=(y+5)(y-3)$;

3) $3x(x+2)=2x(x-2)$;

4) $\frac{1}{4}(3x^2+1)-\frac{40x+3}{6}=\frac{x-3}{12}$;

5) $\frac{y^2-5}{4}-\frac{15-y^2}{5}=\frac{y^2-4}{3}$;

6) $\frac{2x^2-1}{4}=\frac{1+1{,}5x^2}{5}$.

732 Прямоугольник, одна сторона которого на 2 см больше другой, имеет площадь, равную площади квадрата со стороной, на 4 см меньшей периметра прямоугольника. Найти стороны прямоугольника.

733 Прямоугольник, одна сторона которого на 8 см меньше стороны квадрата, а другая вдвое больше стороны квадрата, имеет площадь, равную площади этого квадрата. Найти стороны прямоугольника.

Решить уравнение (734—737).

734 1) $x^2+6x+5=0$; 2) $x^2+3{,}5x-2=0$;

3) $x^2-1{,}8x-3{,}6=0$; 4) $2x^2+3x-2=0$;

5) $4x^2-x-14=0$; 6) $x^2-x+3{,}5=0$.

735 1) $2x^2+x-3=0$; 2) $20+8x-x^2=0$;

3) $2x^2-9x=35$; 4) $(x+5)(x-3)=2x-7$;

5) $2(x-2)(x+2)=(x+1{,}5)^2+4\left(x-5\frac{1}{16}\right)$;

6) $(x-3)(x-2)=7x-1$.

736 1) $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{9}{16}=0$; 2) $\frac{5}{4}x^2-x+\frac{1}{9}=0$;

3) $\frac{x^2}{5}-\frac{2x}{3}=\frac{x+5}{6}$; 4) $\frac{3x^2-11}{8}+\frac{74-2x^2}{12}=10$.

737 1) $x^2+3x+70=0$; 2) $x^2-12x+11=0$;

3) $x^2+20x+100=0$; 4) $x^2+18x-208=0$;

5) $x(x-15)=3(108-5x)$;

6) $(x-3)^2+(x+4)^2-(x-5)^2=17x+24$;

7) $\frac{5x^2+9}{6}-\frac{4x^2-9}{5}=3$; 8) $\frac{x(x-3)}{7}-11=-x$.

738 Найти коэффициенты p и q, если известно, что числа 10 и -15 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$.

739 Записать квадратное уравнение, корни которого отличались бы от корней данного уравнения только знаками:

1) $x^2-8x+15=0$; 2) $x^2+bx+c=0$.

Решить уравнение **(740—743)**.

740 1) $4x^4-17x^2+4=0$; 2) $4x^4-37x^2+9=0$;

3) $x^4-7x^2+12=0$; 4) $x^4-11x^2+18=0$.

741 1) $x^4+x^2-2=0$; 2) $x^4-x^2-12=0$;

3) $x^4+3x^2+2=0$; 4) $x^4+5x^2+6=0$.

742 1) $\frac{3}{x+2}=4+\frac{3}{x-1}$; 2) $\frac{1}{x+1}=3+\frac{3}{3x-1}$;

3) $1+\frac{5x}{x+1}=\frac{6x+2}{(x+1)^2}$; 4) $2+\frac{x}{x+2}=\frac{12-x}{(x+2)^2}$;

5) $\frac{3x}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$; 6) $\frac{2x}{x-3}-\frac{1}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$.

743 1) $\frac{x}{x-3}+\frac{3}{x^2-5x+6}=\frac{3}{2-x}$; 2) $\frac{3}{x-3}+\frac{3}{x^2-7x+12}=\frac{1-x}{x-4}$;

3) $3+\frac{5}{x-1}=\frac{2}{x+2}$; 4) $5+\frac{2}{x-2}=\frac{17}{x+3}$.

744 Разложить на множители квадратный трехчлен:

1) $x^2-12x+35$; 2) $x^2-5x-36$;

3) $2x^2+x-3$; 4) $2x^2-3x-5$;

5) $-5x^2+11x-2$; 6) $-4x^2-10x+6$;

7) $-\frac{1}{3}x^2+8x+27$; 8) $\frac{1}{5}x^2+x-10$.

745 Сократить дробь:

1) $\frac{a^2-4}{a+2}$; 2) $\frac{a+2}{a^2-7a-18}$; 3) $\frac{a^2+7a+12}{a^2+6a+8}$;

4) $\frac{2a^2-5a-3}{4a^2-6a-4}$; 5) $\frac{-2a^2+3a+2}{2a^2+5a+2}$; 6) $\frac{-5a^2+13a+6}{5a^2-8a-4}$.

746 Разложить на множители:

1) $a^4-b^4+b^2-a^2$; 2) $m^2n-n+mn^2-m$;

3) $m^5+m^3-m^2-m^4$; 4) $x^4-x^3-x+x^2$;

5)* $16x^2+8xy-3y^2$; 6)* $4+a^4-5a^2$;

7)* b^4-13b^2+36; 8)* $3x^2-6xm-9m^2$.

747 Для приготовления бронзы берется 17 частей меди, 2 части цинка и одна часть олова. Сколько нужно взять каждого металла отдельно, чтобы получить 400 кг бронзы?

748 Инспектор рыбнадзора, исследуя свой участок, проплыл на катере по течению реки за 4 ч расстояние, в 3 раза большее, чем за 2 ч против течения реки. Какое расстояние преодолел инспектор, если скорость течения реки 3 км/ч?

749 Бригада формовщиков должна была в определенный срок изготовить 48 пресс-форм для отливки деталей. Предложенная бригадой новая технология формовки позволила изготовлять на 4 пресс-формы больше в месяц, поэтому все задание они выполнили за месяц до срока. Сколько пресс-форм выпускала бригада за месяц?

750 С одного участка собрали 450 т картофеля, а с другого, площадь которого на 5 га меньше, 400 т. Определить урожайность картофеля с каждого участка, если на втором участке она была на 2 т выше, чем на первом.

751 Числитель некоторой обыкновенной дроби на 11 больше знаменателя. Если к числителю дроби прибавить 5, а к знаменателю 12, то получится дробь, втрое меньшая исходной. Найти эту дробь.

752 Двумя комбайнами можно убрать урожай с некоторого поля за 12 дней. Если бы уборку производили на каждом комбайне отдельно, то первому потребовалось бы на 10 дней больше, чем второму. За сколько дней на каждом из комбайнов отдельно можно выполнить эту работу?

753 Две бригады монтажников затратили на сборку агрегата 6 ч 40 мин. Сколько времени потребуется на сборку такого же агрегата каждой бригаде отдельно, если одной из них потребуется на эту работу на 3 ч больше, чем другой?

754 Катер прошел 12 км против течения реки и 5 км по течению реки за то же время, которое ему понадобилось для прохождения 18 км по озеру. Какова собственная скорость катера, если известно, что скорость течения реки 3 км/ч?

755 Построить графики функций и найти координаты точек их пересечения:

1) $y = 2x$ и $y = 3$; 2) $y = x - 1$ и $y = 0$;
3) $y = 3x$ и $y = -2x + 1$; 4) $y = 2x - 1$ и $y = -x + 3$.

756 Дана функция $y = 2{,}5x - 5$. Найти:

1) значение x, при котором значение функции равно нулю;
2) координаты точек пересечения графика функции с осями координат.

757 Дана функция $y = -3x + 1$.

1) Вычислить: $y(0)$, $y(1)$, $y(-1)$, $y(-4)$.
2) Найти значения x, при которых $y(x) = 1$, $y(x) = -1$, $y(x) = -3$.
3) Найти значения x, при которых $y(x) > 0, y(x) < 0, y(x) = 0$.

758 Найти координаты вершины параболы и точки пересечения параболы с осями координат:

1) $y = (x - 4)^2 + 4$; 2) $y = (x + 4)^2 - 4$;
3) $y = x^2 + x$; 4) $y = x^2 - x$;
5) $y = x^2 - 4x + 3$; 6) $y = x^2 + 6x + 8$;
7) $y = 2x^2 - 3x - 2$; 8) $y = 3 + 5x + 2x^2$.

759 Построить график функции:

1) $y = x^2 + 6x + 9$; 2) $y = x^2 - \frac{7}{2}$;
3) $y = x^2 - 12x + 4$; 4) $y = x^2 + 3x - 1$;
5) $y = x^2 + x$; 6) $y = x^2 - x$;
7) $y = (x - 2)(x + 5)$; 8) $y = \left(x + \frac{1}{8}\right)(x + 4)$.

760 (Устно.) Используя график функции $y = ax^2 + bx + c$ (рис. 65), установить ее свойства.

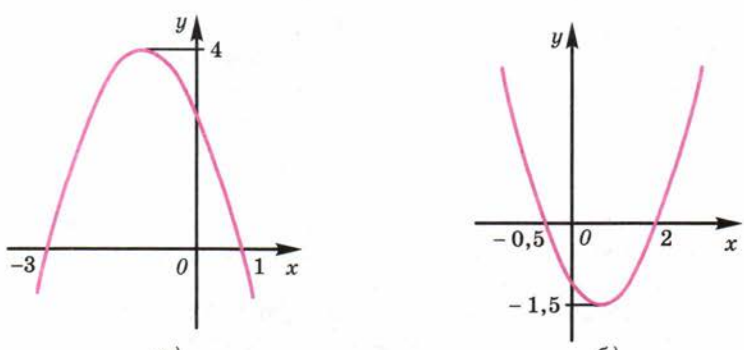


Рис. ***65***

761 Построить график функции и установить ее свойства:

1) $y=-2x^2-8x-8$; 2) $y=3x^2+12x+16$;
3) $y=2x^2-12x+19$; 4) $y=3+2x-x^2$;
5) $y=-4x^2-4x$; 6) $y=12x-4x^2-9$.

762 На одной координатной плоскости построить графики функций:

1) $y=\frac{1}{3}x^2$ и $y=-\frac{1}{3}x^2$; 2) $y=3x^2$ и $y=3x^2-2$;
3) $y=-\frac{1}{2}x^2$ и $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$; 4) $y=2x^2$ и $y=2(x-5)^2+3$.

Решить неравенство **(763—767)**.

763 1) $(x-5)(x+3)>0$; 2) $(x+15)(x+4)<0$;
3) $(x-7)(x+11)\leqslant 0$; 4) $(x-12)(x-13)\geqslant 0$.

764 1) $x^2+3x>0$; 2) $x^2-x\sqrt{5}<0$;
3) $x^2-16\leqslant 0$; 4) $x^2-3>0$.

765 1) $x^2-8x+7>0$; 2) $x^2+3x-54<0$;
3) $\frac{1}{2}x^2+0{,}5x-1>0$; 4) $5x^2+9{,}5x-1<0$;
5) $-x^2-3x+4>0$; 6) $-8x^2+17x-2\leqslant 0$.

766 1) $x^2-6x+9>0$; 2) $x^2+24x+144\leqslant 0$;
3) $\frac{1}{2}x^2-4x+8<0$; 4) $\frac{1}{3}x^2+4x+12\geqslant 0$;
5) $4x^2-4x+1>0$; 6) $5x^2+2x+\frac{1}{5}<0$.

767 1) $x^2-10x+30<0$; 2) $-x^2+x-1<0$;
3) $x^2+4x+5<0$; 4) $2x^2-4x+13>0$;
5) $4x^2-9x+7<0$; 6) $-11+8x-2x^2<0$.

Решить неравенство методом интервалов **(768—770)**.

768 1) $(x+3)(x-4)>0$; 2) $\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+0{,}7)<0$;
3) $(x-2{,}3)(x+3{,}7)<0$; 4) $(x+2)(x-1)\leqslant 0$.

769 1) $(x+2)(x-1)\geqslant 0$; 2) $(x+2)(x-1)^2\leqslant 0$;
3) $(x+2)(x-1)^2>0$; 4) $(2-x)(x+3x^2)\geqslant 0$.

770 1) $\frac{3-x}{2+x}\geqslant 0$; 2) $\frac{0{,}5+x}{x-2}\leqslant 0$;
3) $\frac{(x-1)(x+2)}{x}<0$; 4) $\frac{2x}{(3+x)(1-x)}<0$.

771 Делая утреннюю зарядку, мальчик ежедневно пробегал от дома до леса 600 м. До леса он бежал одну треть пути со скоростью 2 м/с, а оставшееся расстояние — со скоростью 3 м/с. Возвращаясь к дому, первую треть пути он пробегал со скоростью 3 м/с, а оставшееся расстояние — со скоростью 2 м/с. На какой пробег мальчик тратил времени больше: от дома до леса или от леса до дома?

772 На руднике за день добыли 2000 т руды, содержащей $\frac{17}{25}$ железа от общей массы руды. На соседнем руднике добыли за первую половину дня 1200 т руды, содержащей $\frac{3}{5}$ железа, а за вторую половину дня 1000 т руды, содержащей $\frac{5}{8}$ железа. На каком руднике добыли за день больше чистого железа?

773 На спортивных соревнованиях семиклассник пробежал дистанцию 60 м за 9 с, а десятиклассник — дистанцию 100 м за 14,8 с. Считая, что ученики бежали с постоянными скоростями, выяснить, кто бежал быстрее.

774 Доказать, что:

1) если $(y-3)^2 > (3+y)(y-3)$, то $y < 3$;
2) если $(3a+b)^2 < (3a-b)^2$, то $ab < 0$.

775 Доказать, что если $x < \frac{a+b}{2}$, $y < \frac{a+c}{2}$, $z < \frac{b+c}{2}$, то $x + y + z < a + b + c$.

776 Высота прямоугольного параллелепипеда больше 15 см, ширина больше 2 см, а длина больше 0,3 м. Доказать, что его объем больше 0,9 дм^3.

777 Масштаб физической карты России в учебнике географии 1 : 20 000 000. На карте расстояние: 1) от Москвы до Орла больше 2 см; 2) от Москвы до Рязани меньше 2 см. Каковы эти расстояния в действительности?

778 Груз массой не более 1,6 кг подняли на высоту 8-го этажа (не большую 25 м). Какую при этом совершили работу?

779 Доказать, что на нагревание не менее 2 кг воды в латунном стакане массой не меньше 1 кг от 20 до 70 °С потребуется не менее 438 кДж теплоты. Удельная теплоемкость воды 4,19 кДж/(кг · °С), латуни 0,38 кДж/(кг · °С).

780 Доказать, что при любых a и b выполняется неравенство $a^2 + 4b^2 - 2a - 12b + 10 \geqslant 0$.

781 Решить систему неравенств:

1) $\begin{cases} 5x - 4 \geqslant x - 3, \\ -2x + 11 > x + 1, \\ 12 - 3x > 4 - 5x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x \leqslant 5 - 6x, \\ -3x + 1 \leqslant 4x - 1, \\ 7 - 2x > 2x + 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 2 > 2(x-3) + 5x, \\ 2x^2 + (5+x)^2 > 3(x-5)(x+5); \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8x(2+x)(x-2) < (2x-3)(4x^2+6x+9) - 5x, \\ \left(\frac{1}{4}x + 2\right)\left(2 - \frac{1}{4}x\right) - \left(3 - \frac{1}{4}x\right)\left(\frac{1}{4}x + 2\right) > -3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)(x+3) > 2x(x+3), \\ \dfrac{x+3}{3} > \dfrac{3x+4}{2}; \end{cases}$

6) $\begin{cases} \left(3x+\dfrac{1}{2}\right)(2-x)+\dfrac{1}{2}(x+1) > 3(3-x)(3+x)-1, \\ 2-(2x+3)^2+(3+2x)(2x-3) < -2\dfrac{1}{3}(9+x)+\dfrac{1}{3}. \end{cases}$

782 Одна сторона прямоугольника больше другой на 3 см. Какой может быть длина меньшей стороны прямоугольника, если периметр его больше 14 см, но меньше 18 см?

783 За 1 ч улитка проползла меньше 5 м, а за следующие 45 мин, двигаясь с той же скоростью, не менее 3 м. Какова скорость улитки?

784 Если часы в Варшаве (первый часовой пояс) показывают время между 10 и 11 часами, то какое время показывают в этот момент часы во Владивостоке (девятый часовой пояс)?

785 Решить неравенство:

1) $|2x+3| \leqslant 7$; 2) $|5-3x| > 4$.

786 Упростить выражение:

1) $a\sqrt{4a} - 2a^2\sqrt{\dfrac{1}{a}} + \dfrac{1}{3}a\sqrt{25a}$, где $a > 0$;

2) $\sqrt{a^3b^5} - 6ab\sqrt{ab^3} + 0{,}4b^2\sqrt{a^3b}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

787 Вычислить:

1) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

2) $\left(\sqrt{13+5\sqrt{4{,}2}} + \sqrt{13-5\sqrt{4{,}2}}\right)^2$;

3) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{25^2-24^2}}{21{,}5^2-14{,}5^2}}$; 4) $\sqrt{\dfrac{23^2-22^2}{\sqrt{13^2-12^2}}}$.

788 Упростить выражение:

1) $\left(\dfrac{a+1}{\sqrt{a-1}} - \sqrt{a+1}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{a+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{a-1}}\right)$;

2) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}} - \dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}\right) : \dfrac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}$;

3) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-a}} - \sqrt{1+a}\right) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}} - 1\right)$;

4) $\left(\dfrac{a+1}{\sqrt{a}} + \dfrac{1}{a-\sqrt{a}} - \dfrac{a}{1+\sqrt{a}}\right) \cdot \dfrac{\sqrt{3}-a\sqrt{3}}{a+1}$.

789 Упростить выражение:

1) $\frac{a+b}{a+2b}:\left(\frac{a}{a-2b}+\frac{b^2}{a^2-4b^2}\right)$;

2) $\left(\frac{b}{b-c}-\frac{bc}{b^2-c^2}\right):\frac{4b^2}{b^2-2bc+c^2}$;

3) $\frac{b^2}{a^2-2ab}:\left(\frac{2ab}{a^2-4b^2}-\frac{b}{a+2b}\right)$;

4) $\left(\frac{2ab}{a^2-9b^2}-\frac{b}{a-3b}\right):\frac{b^2}{a^2+3ab}$.

790 Доказать, что при любом y положительно значение выражения:

1) $(y-3)(y-1)+5$; 2) $(y-4)(y-6)+3$.

791 Найти множество значений k, при которых уравнение $4y^2-3y+k=0$ не имеет действительных корней.

792 При каких значениях k число -2 является корнем уравнения $(k-2)x^2-7x-2k^2=0$?

793 Решить уравнение:

1) $3x^2+8x+5=0$; 2) $5x^2+4x-12=0$;

3) $\frac{6}{4x^2-1}-\frac{x}{2x-1}=\frac{5}{2x+1}$; 4) $\frac{5}{x-1}+\frac{3x-3}{2x+2}=\frac{2x^2+8}{x^2-1}$;

5) $\frac{30}{x^2-1}-\frac{13}{x^2+x+1}=\frac{7+18x}{x^3-1}$; 6) $\frac{2}{x^2-x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{2x-1}{x^3+1}$.

794 Упростить выражение:

1) $\frac{2x^2+x}{2x-9}\cdot\left(\frac{8x}{4x^2-1}+\frac{9}{2x^2-11x+5}+\frac{9}{5+9x-2x^2}\right)-\frac{10}{x-5}$;

2) $\frac{2y+13}{2y-5}:\left(\frac{2y}{2y^2+3y-20}+\frac{8}{y^2-16}-\frac{3}{2y^2-13y+20}\right)$.

795 Из пункта A выходит пешеход со скоростью 4 км/ч, через 45 мин из пункта A в том же направлении выезжает велосипедист со скоростью 8 км/ч. На каком расстоянии от пункта A велосипедист догонит пешехода?

796 С туристской базы вышла группа лыжников. Через 20 мин вслед за ней вышел опоздавший лыжник, который после 40 мин ходьбы догнал группу. С какой скоростью двигался опоздавший лыжник, если его скорость была больше скорости группы на 5 км/ч?

797 Из пункта A в пункт B выезжает грузовой автомобиль со скоростью 50 км/ч. Через 24 мин вслед за ним выезжает автобус со скоростью 60 км/ч. Каково расстояние между пунктами A и B, если грузовой автомобиль и автобус прибыли в пункт B одновременно?

798 Скорость моторной лодки по течению реки равна 23 км/ч, а против течения 17 км/ч. Найти скорость течения и собственную скорость лодки.

799 Ученик за 3 блокнота и 2 тетради уплатил 40 р., другой ученик за 2 таких же блокнота и 4 тетради уплатил 32 р. Сколько стоил блокнот и сколько стоила тетрадь?

800 Для отправки груза было подано несколько вагонов. Если грузить по 15,5 т в вагон, то 4 т груза останутся непогруженными; если же грузить по 16,5 т в вагон, то для полной загрузки не хватит 8 т груза. Сколько было подано вагонов и сколько было тонн груза?

801 В техникуме для проведения вступительного экзамена было заготовлено 750 листов бумаги. Но так как поступающих оказалось на 45 человек больше, чем предполагалось, то, хотя и добавили еще 30 листов, каждый получил на один лист меньше. Сколько листов было заготовлено на каждого поступающего первоначально?

802 При испытании двух двигателей было установлено, что расход бензина при работе первого двигателя составил 450 г, а при работе второго — 288 г, причем второй двигатель работал на 3 ч меньше и расходовал бензина в час на 6 г меньше. Сколько граммов бензина расходует в час каждый двигатель?

803 Индусская задача «Стая обезьян»:

На две партии разбившись,
Забавлялись обезьяны.
Часть восьмая их в квадрате
В роще весело резвилась.
Криком радости двенадцать
Воздух свежий оглашали.
Вместе сколько, ты мне скажешь,
Обезьян там было в стае?

804 Решить неравенство:

1) $(x+2)^2<(2x-3)^2-8(x-5)$;

2) $\dfrac{2+x}{9}-x\leqslant\dfrac{2x-5}{3}-(4-x)^2$;

3) $\dfrac{(2x-3)(x+2)}{12}-\dfrac{(x-7)}{3}>\dfrac{(x-6)^2}{4}+x$;

4) $6x+\dfrac{(3+5x)^2}{2}>\dfrac{8-2x}{5}-\dfrac{(x+3)(x+7)}{2}$.

805 Площадь трапеции больше 19,22 см^2. Средняя линия ее вдвое больше высоты. Найти среднюю линию и высоту трапеции.

806 С самолета, находящегося на высоте, большей 320 м, геологам был сброшен груз. За какое время груз долетит до земли? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2.

807 Сторона параллелограмма на 2 см больше высоты, опущенной на эту сторону. Найти длину этой стороны, если площадь параллелограмма больше 15 см^2.

808 Решить методом интервалов неравенство:

1) $(x+2)(x+5)(x-1)(x+4)>0$;

2) $(x+1)(3x^2+2)(x-2)(x+7)<0$;

3) $\frac{3x-1}{3x+1}+\frac{x-3}{x+3}\geqslant 2$; 4) $\frac{1-3x}{1+3x}+\frac{1+3x}{3x-1}\geqslant\frac{12}{1-9x^2}$.

809 Найти коэффициенты p и q квадратного трехчлена x^2+px+q, если этот трехчлен при $x=0$ принимает значение, равное -14, а при $x=-2$ принимает значение -20.

810 Найти p и q, если парабола $y=x^2+px+q$:

1) пересекает ось абсцисс в точках $x=-\frac{1}{2}$ и $x=\frac{2}{3}$;

2) касается оси абсцисс в точке $x=-7$;

3) пересекает ось абсцисс в точке $x=2$ и ось ординат в точке $y=-1$.

811 Записать уравнение параболы, если известно, что она пересекает ось абсцисс в точке 5, а ее вершиной является точка $\left(2\frac{3}{4};\ 10\frac{1}{8}\right)$.

812 Зеркало отражателя телескопа (рефлектора) имеет в осевом сечении вид параболы (рис. 66). Написать уравнение этой параболы.

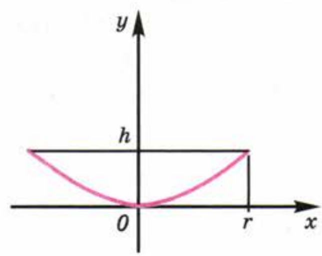


Рис. 66

813 Найти коэффициенты квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если ее график:

1) проходит через точки $A(-1;\ 0)$, $B(3;\ 0)$ и $C(0;\ -6)$;

2) проходит через точки $K(-2;\ 0)$, $L(1;\ 0)$ и $M(0;\ 2)$.

814 Доказать, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство:

1) $a^2+b^2\leqslant(a+b)^2$; 2) $a^3+b^3\leqslant(a+b)^3$;

3) $a^3+b^3\geqslant a^2b+ab^2$; 4) $(a+b)^3\leqslant 4(a^3+b^3)$.

815 Доказать, что для любых положительных чисел a, b, c справедливо неравенство:

1) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$; 2) $\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{ab}{c}\geqslant a+b+c$;

3) $\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}\geqslant\frac{a+b+c}{3}$; 4) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$.

816 Построить график функции:

1) $y=\sqrt{x^2}$; 2) $y=|x-1|$; 3) $y=\sqrt{x^2-6x+9}$;

4) $y=\sqrt{x^2+4x+4}$; 5) $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2}$;

6) $y=\sqrt{x^2-4x+4}+|x+2|$.

817 Найти действительные корни уравнения:

1) $x^2-|x|-2=0$; 2) $x^2-4|x|+3=0$;

3) $|x^2-x|=2$; 4) $|x^2+x|=1$;

5) $|x^2-2|=2$; 6) $|x^2-26|=10$.

818 Доказать, что квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ имеет два действительных корня разных знаков при любом b, если $ac<0$.

819 Корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2-2rx-7r^2=0$ удовлетворяют условию $x_1^2+x_2^2=18$. Найти r.

820 Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2-5x+3=0$. Составить квадратное уравнение с корнями x_1^4 и x_2^4, не решая данное.

821 Не вычисляя корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $2x^2+7x-8=0$, найти:

1) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; 2) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; 3) $x_1^4x_2+x_2^4x_1$; 4) $x_1^4+x_2^4$.

822 Найти все такие значения r, при которых квадратное уравнение $x^2+(r-1)x-2(r-1)=0$ имеет действительные корни x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $|x_1-x_2|=3$.

823 Доказать, что если коэффициенты квадратных уравнений

$$x^2+p_1x+q_1=0 \text{ и } x^2+p_2x+q_2=0$$

связаны равенством $p_1p_2=2(q_1+q_2)$, то по крайней мере одно из этих уравнений имеет действительные корни.

824 Квадратичная функция $y=x^2+px+q$ принимает при $x=1$ наименьшее значение, равное -4. Найти $y(0)$.

825 Квадратичная функция $y=-x^2+bx+c$ принимает при $x=1$ наибольшее значение, равное -4. Найти $y(-1)$.

826 Найти коэффициенты a, b, c квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$, если она при $x=1$ принимает наибольшее значение, равное 3, а $y(0)=0$.

827 Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=6$ м/с. Определить, через сколько секунд после начала движения тело достигает наибольшей высоты, если высоту можно найти по формуле $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ (ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2).

828 Разложить многочлен на множители:

1) a^4-2a^2-3; 2) a^4-5a^2+4.

829 Сократить дробь:

1) $\frac{a^2+ab-6b^2}{a^2-ab-2b^2}$; 2) $\frac{2a^2+5ab-3b^2}{4a^2+4ab-3b^2}$;

3) $\frac{8a^3+27b^3}{2a^2+ab-3b^2}$; 4) $\frac{8a^3-27b^3}{2a^2-ab-3b^2}$.

830 Найти скорость и длину поезда, зная, что он проходит мимо неподвижного наблюдателя за 7 с и затрачивает 25 с на то, чтобы пройти с той же скоростью мимо платформы длиной 378 м.

831 Пассажир метро спускается вниз по движущемуся эскалатору за 24 с. Если пассажир идет с той же скоростью, но по неподвижному эскалатору, то он спускается за 42 с. За сколько секунд он спустится, стоя на ступеньке движущегося эскалатора?

832 Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге с постоянными скоростями в одном направлении, оказываются рядом через каждые 56 мин. При движении с теми же скоростями в противоположных направлениях автомобили встречаются через каждые 8 мин. За какое время проедет всю кольцевую трассу каждый автомобиль?

833 Два спортсмена бегают по одной замкнутой дорожке; скорость каждого постоянна, и на пробег всей дорожки один тратит на 5 с меньше другого. Если они начнут пробег с общего старта одновременно и в одном направлении, то окажутся рядом через 30 с. Через какое время они встретятся, если побегут одновременно с общей линии старта в противоположных направлениях?

834 Пешеход и велосипедист отправляются из пункта A в пункт B одновременно. Прибыв в пункт B, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 20 мин после начала движения. Не останавливаясь, велосипедист доезжает до пункта A, поворачивает обратно и догоняет пешехода через 10 мин после первой встречи. За какое время пешеход пройдет путь от A до B?

835 Из пункта A в пункт B выехал мотоциклист, и одновременно навстречу ему из пункта B в пункт A выехал велосипедист. Мотоциклист прибыл в пункт B через 2 ч после встречи с велосипедистом, а велосипедист прибыл в пункт A через 4,5 ч после встречи с мотоциклистом. Сколько часов были в пути мотоциклист и велосипедист?

836 Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1:

1) $48{,}3+\frac{17{,}83\cdot 16{,}94}{8{,}367}$; 2) $67{,}8-\frac{8604\cdot 48{,}4}{7651}$;

3) $5{,}31\cdot(3{,}57\cdot 4{,}28-7{,}04)$; 4) $1{,}34\cdot\left(\frac{8354}{375}+37{,}6\right)$.

837 Вычислить на микрокалькуляторе приближенно с точностью до 0,01:

1) $34{,}3^2 - 23{,}1^2 + 17{,}8^2$; 2) $7{,}62^2 + 3{,}56^2 - 6{,}98^2$;

3) $\frac{1}{0{,}54} + \frac{1}{0{,}32} + \frac{1}{0{,}87}$; 4) $\frac{1}{0{,}17} - \frac{1}{0{,}38} + \frac{1}{0{,}87}$.

838 Вычислить на микрокалькуляторе приближенно с точностью до 0,01:

1) $27{,}3 \cdot 1{,}28 + (43{,}4 - 39{,}8) \cdot 2{,}34$;

2) $(257 - 189) : 2{,}31 - (354 - 487) : 3{,}14$.

Вычислить на микрокалькуляторе с точностью до 0,1 **(839—842)**.

839 1) $\sqrt{10} + \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{\sqrt{130} - \sqrt{8}}$;

3) $31{,}4 + \sqrt{820 - \sqrt{104}}$; 4) $87{,}3 - \sqrt{563 + \sqrt{231}}$.

840 1) $\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{5}}}$; 2) $\sqrt{30 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}$;

3) $\sqrt{\sqrt{3} + \sqrt{3 + \sqrt{3}}}$; 4) $\sqrt{2\sqrt{3} + 4\sqrt{5}}$.

841 1) $\frac{123}{\sqrt{11}} - \frac{251}{\sqrt{13}}$; 2) $\frac{426}{\sqrt{5}} - \frac{43}{\sqrt{3}}$;

3) $\sqrt{14{,}2^2 + 89{,}3^2}$; 4) $\sqrt{30{,}2^2 - 4{,}73^2}$.

842 1) $\frac{\sqrt{78} - \sqrt{13}}{\sqrt{5} + \sqrt{6}}$; 2) $\frac{\sqrt{99} - \sqrt{13}}{\sqrt{89} - \sqrt{3}}$.

843 С помощью микрокалькулятора найти корни уравнения:

1) $x^2 - 62x - 7503 = 0$; 2) $x^2 + 181x + 5412 = 0$;

3) $x^2 - 9{,}7x + 21{,}42 = 0$; 4) $x^2 + 1{,}5x - 62{,}85 = 0$.

844 С помощью микрокалькулятора решить уравнение:

1) $x^4 - 14{,}9x^2 + 50{,}8369 = 0$;

2) $x^4 - 8{,}01x^2 + 12{,}96 = 0$.

Старинные задачи

Задача Пифагора Самосского (ок. 580—500 гг. до н. э., древнегреческий математик и философ).

845 Сумма любого числа последовательных нечетных чисел, начиная с единицы, есть точный квадрат.

Задача Архимеда (ок. 287—212 гг. до н. э., древнегреческий математик, физик и механик).

846 Доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1).$$

З а д а ч и Д и о ф а н т а (вероятно, III в., дневнегреческий математик).

847 Катет прямоугольного треугольника равен кубу числа, другой катет равен разности между кубом числа и самим числом, а гипотенуза равна сумме куба числа и самого числа. Найти это число.

848 Требуется число 100 разделить два раза так, чтобы бóльшая его часть от первого деления была вдвое более меньшей части от второго деления и чтобы бóльшая часть от второго деления была втрое более меньшей части от первого деления.

И н д и й с к а я з а д а ч а.

849 Показать, что $\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.

З а д а ч а О м а р а Х а й я м а (1048 — ок. 1131, среднеазиатский поэт, философ, астроном и математик).

850 Решить уравнение

$$\frac{1}{x^2}+2\cdot\frac{1}{x}=1\frac{1}{4}.$$

З а д а ч а а л - К а р а д ж и (ум. в 1016, иранский математик, автор трудов по арифметике и алгебре).

851 Найти число, которое от умножения на $3+\sqrt{5}$ дает 1.

З а д а ч а Л. Э й л е р а (1707—1783, математик, механик, физик и астроном, академик Петербургской академии наук).

852 Две крестьянки принесли на рынок 100 яиц, одна больше, нежели другая; обе выручили одинаковые суммы. Первая сказала второй: «Будь у меня твои яйца, я выручила бы 15 крейцеров». Вторая ответила: «А будь твои яйца у меня, я выручила бы за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Сколько яиц было у каждой?

З а д а ч а Э. Б е з у (1730—1783, французский математик).

853 Некто купил лошадь и спустя некоторое время продал ее за 24 пистоля. При этой продаже он потерял столько процентов, сколько стоила ему лошадь. Спрашивается: за какую сумму он ее купил?

Задачи для внеклассной работы

854 Доказать, что если из трехзначного числа вычесть трехзначное число, записанное теми же цифрами, что и первое, но в обратном порядке, то модуль полученной разности будет делиться на 9 и 11.

855 Если между цифрами двузначного числа x вписать это же число, то полученное четырехзначное число будет в 66 раз больше первоначального двузначного. Найти x.

856 Доказать, что сумма $333^{555} + 555^{333}$ делится на 37.

857 Доказать, что сумма $11^{11} + 12^{12} + 13^{13}$ делится на 10.

858 Какой цифрой оканчивается степень 1999^{1999}?

859 Сколькими нулями оканчивается число, полученное при перемножении всех натуральных чисел от 1 до 100?

860 Доказать, что сумма $10^{15} + 10^{17} - 74$ делится на 9.

861 Доказать, что значение выражения $n^3 + 11n$ делится на 6 при любом натуральном n.

862 Доказать, что значение выражения $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ делится на 3 при любом натуральном n.

863 Доказать, что при любом целом n значение выражения $n^5 - n$ делится на 30.

864 Доказать, что при любом целом n значение выражения $n^5 - 5n^3 + 4n$ делится на 120.

865 Найти пятизначное число, если известно, что при умножении этого числа на 9 получается пятизначное число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

866 Доказать, что разность между трехзначным числом и числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, не может равняться квадрату натурального числа.

867 Доказать, что если x и y — целые числа такие, что число $3x+8y$ делится на 17, то сумма $35x+65y$ также делится на 17.

868 Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не может быть квадратом натурального числа.

869 Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел не является квадратом натурального числа.

870 Доказать, что ни при каком целом n значение выражения $n^2+5n+16$ не делится на 169.

871 Доказать, что если сумма квадратов двух натуральных чисел делится на 3, то и каждое из этих чисел делится на 3.

872 Доказать, что ни одно из чисел вида n^3-3, где n — натуральное число, не делится на 7.

873 Доказать, что если p — простое число, большее трех, то значение выражения p^2-1 делится на 24.

874 Найти все простые числа n такие, что n^2+8 — простое число.

875 Доказать, что если p — простое число и $p \geqslant 5$, то остаток от деления p^2 на 12 равен 1.

876 Доказать, что если n — натуральное число и $n>1$, то n^4+4 — составное число.

877 Найти целые числа x и y, удовлетворяющие уравнению $x+y=xy$.

878 Доказать равенство:

1) $\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{5}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}$;

2) $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\dfrac{8}{\sqrt{3}-\sqrt{11}}=\dfrac{4}{\sqrt{11}-\sqrt{7}}$;

3) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}=\sqrt{99}-1$;

4) $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}=\dfrac{3}{a(a+3)}$;

5) $n(n+1)(n+2)(n+3)+1=(n^2+3n+1)^2$.

879 Доказать, что $1980\cdot1981\cdot1982\cdot1983+1$ является квадратом некоторого натурального числа x, и найти x.

880 Доказать равенство:

1) $\dfrac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)}=a+b+c;$

2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a);$

3) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a);$

4) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca);$

5) $(a+b+c)^3-(a+b-c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3=24abc;$

6) $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(a-b)(a-c)(c-b).$

881 Доказать, что из равенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

следует равенство

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}.$$

882 Доказать, что выражение

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$$

не равно нулю, если a, b, c — попарно не равные между собой числа.

883 Доказать, что если $a\neq b$ и $\dfrac{a^2-bc}{a(1-bc)}=\dfrac{b^2-ac}{b(1-ac)}$, то

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

884 Пусть $x+y=a$, $xy=b$. Доказать, что:

1) $x^3+y^3=a^3-3ab;$

2) $x^4+y^4=a^4-4a^2b+2b^2;$

3) $x^5+y^5=a^5-5a^3b+5ab^2;$

4) $x^6+y^6=a^6-6a^4b+9a^2b^2-2b^3.$

885 Упростить выражение:

1) $\dfrac{4}{1+x^4}+\dfrac{2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x};$

2) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}+\dfrac{c^2-ab}{(a+c)(b+c)};$

3) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $1\leqslant x<2;$

4) $\dfrac{\sqrt{m+x}+\sqrt{m-x}}{\sqrt{m+x}-\sqrt{m-x}}$, если $x=\dfrac{2mn}{n^2+1}$, где $m>0$, $0<n<1$.

886 Решить уравнение:

1) $x^2-2|x-1|=2;$

2) $(x+1)|x-2|=2;$

3) $||x-1|-3|=2;$

4) $|x^2-9|+|x^2-4|=5;$

5) $x^2+3x+\dfrac{6}{2-3x-x^2}=1;$

6) $\dfrac{1}{x^2+6x+5}+\dfrac{18}{x^2+6x+10}=\dfrac{18}{x^2+6x+9};$

7) $x^2+\dfrac{1}{x^2}-5x-\dfrac{5}{x}+8=0;$ 8) $x(x^2-1)(x+2)+1=0.$

887 Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} x^2+xy=10, \\ y^2+xy=15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)(y-1)=6, \\ (x+2)(y+2)=30; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2+y^2+xy=19; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=18, \\ x^2-y^2+x-y=6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^4+y^4=17(x+y)^2, \\ xy=2(x+y); \end{cases}$

7) $\begin{cases} 2y^2-4xy+3x^2=17, \\ y^2-x^2=16; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} x^2-xy+y^2=21, \\ y^2-2xy+15=0. \end{cases}$

888 Найти действительные решения системы уравнений:

1) $\begin{cases} xy(x+y)=6, \\ x^3+y^3=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=7, \\ (x+y)(x^2+y^2)=175; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ 1+y^2=5(1+x^2); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^3+y^3+x^2y+xy^2=5, \\ x^4y^2+x^2y^4=20; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2(x+y)=5xy, \\ 8(x^3+y^3)=65; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y), \\ x^3+y^3=7(x+y); \end{cases}$

7) $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=9, \\ (x-y)(x^2+y^2)=5; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}. \end{cases}$

889 Найти все значения r, при которых уравнение $x^2+rx+2r-3=0$ имеет:

1) равные корни;

2) действительные корни, модули которых равны, а знаки противоположны.

890 Доказать, что если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $x^2-rx-r=0$, где $r>0$, то выполняется неравенство

$$x_1^3+x_2^3+(x_1x_2)^3>0.$$

891 Доказать, что если $(a+b)^2>c^2$ и $(a-b)^2<c^2$, то квадратное уравнение

$$a^2x^2+(b^2+a^2-c^2)x+b^2=0$$

не имеет действительных корней.

892 Доказать, что если уравнение $x^2+px+q=0$ имеет действительные корни, то уравнение

$$x^2+\left(r+\frac{1}{r}\right)px+q\left(r-\frac{1}{r}\right)^2=0$$

также имеет действительные корни при любом $r \neq 0$.

893 Доказать, что если квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, где p и q — целые числа, имеет рациональные корни, то эти корни — целые числа.

894 Каким условиям удовлетворяют числа a и b, если биквадратное уравнение $x^4-(a+b)x^2+ab=0$ имеет четыре различных действительных корня?

895 Доказать, что если $r<0$, то квадратное уравнение

$$x^2-2(r-1)x+2r+1=0$$

имеет действительные корни. При каких значениях $r\,(r<0)$ оба корня этого уравнения отрицательны?

896 Найти все значения r, для которых при всех действительных значениях x выполняется неравенство

$$(r^2-1)x^2+2(r-1)x+1>0.$$

897 Доказать, что при всех действительных значениях x справедливо неравенство:

$$\frac{1}{3} \leqslant \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} \leqslant 3.$$

898 Найти все значения a, при которых уравнения

$$x^2+ax+1=0 \text{ и } x^2+x+a=0$$

имеют хотя бы один общий действительный корень.

899 Пусть a, b, c — различные числа, причем $c \neq 0$. Доказать, что если уравнения $x^2+ax+bc=0$ и $x^2+bx+ca=0$ имеют ровно один общий корень, то другие корни этих уравнений являются корнями уравнения $x^2+cx+ab=0$.

900 Найти все значения r, при которых корни уравнения

$$(r-4)x^2-2(r-3)x+r=0$$

положительны.

901 Доказать, что корни уравнения $x^2+px+q=0$ действительные и отрицательные только тогда, когда $p^2-4q \geqslant 0$, $p>0$, $q>0$.

902 Найти все значения r, при которых корни уравнения $2rx^2-(r+1)x+1=0$ действительны и оба по модулю меньше единицы.

903 Известно, что корни квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ по модулю больше единицы и имеют разные знаки. Доказать, что $p + q + 1 < 0$, $q - p + 1 < 0$.

904 Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней. Определить знак числа c, если:
1) $a + b + c > 0$; 2) $a - b + c < 0$.

905 Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и пусть $s_m = x_1^m + x_2^m$, где m — натуральное число, $m \geqslant 2$. Доказать, что

$$as_m + bs_{m-1} + cs_{m-2} = 0.$$

906 Доказать, что выражение

$$3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) - 8\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 10$$

принимает неотрицательные значения при любых значениях a и b, не равных нулю.

907 Доказать, что при любых действительных значениях x и y справедливо неравенство

$$x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 > 0.$$

908 Найти все значения a, при которых вершины двух парабол $y = x^2 - 2(a+1)x + 1$ и $y = ax^2 - x + a$ лежат по разные стороны от прямой $y = \frac{3}{4}$.

909 Найти все значения a, при которых вершины двух парабол $y = 4x^2 + 8ax - a$ и $y = 4ax^2 - 8x + a - 2$ лежат по одну сторону от прямой $y = -5$.

910 Разложить на множители:
1) $x^3 - 6x^2 - x + 30$;
2) $x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$;
3) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$;
4) $(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$.

911 Разложить многочлен $x^5 + x + 1$ на два множителя с целыми коэффициентами.

912 Сократить дробь:
1) $\dfrac{x^6 + x^4 - x^2 - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$; 2) $\dfrac{x^3 + x^2 - 4x - 4}{x^3 - 3x - 2}$;

3) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + x - 2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 2}$; 4) $\dfrac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}$;

5) $\dfrac{x^3 + 5x^2 + 7x + 3}{2x^3 + 5x^2 + 4x + 1}$; 6) $\dfrac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16}$.

913 Построить график функции:

1) $y=|x^2-2x|$;
2) $y=|x^2+x|$;
3) $y=|x^2-5x+6|$;
4) $y=|x^2-x-2|$;
5) $y=x^2-|x|$;
6) $y=x^2-2|x|-3$;
7) $y=|x^2-3|x|-4|$;
8) $y=|x^2-6|x|+5|$.

914 Решить неравенство:

1) $\frac{5-4x}{3x^2-x-4}<4$;
2) $\frac{19-33x}{7x^2-11x+4}>3$;
3) $\frac{x^4-x^2-12}{x^3+1}>0$;
4) $\frac{x^4-8x^2-9}{x^3-1}<0$;
5) $|x^2-5x|\geqslant 6$;
6) $|2x+3|>|4x-3|$;
7) $|x^2+4x+3|>|x+3|$;
8) $|x^2-x+1|\leqslant|x^2-3x+4|$.

915 Доказать, что для любых чисел a и b справедливо неравенство:

1) $a^2+b^2\geqslant 2(a+b-1)$;
2) $2a^2+5b^2\geqslant 2ab$;
3) $a^2+b^2\geqslant ab+a+b-1$;
4) $a^2+ab+b^2\geqslant 0$;
5) $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$;
6) $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\geqslant(a^3+b^3)^2$.

916 Доказать, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство:

1) $a+\frac{1}{a}+b+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{ab}+\frac{2}{\sqrt{ab}}$;
2) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+1\geqslant\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$;
3) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leqslant\frac{a}{b^2}+\frac{b}{a^2}$;
4) $\frac{a+b}{1+a+b}<\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$.

917 Доказать, что для любых чисел a, b, c выполняется неравенство:

1) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ac$;
2) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leqslant|a|+|b|+|c|$;
3) $(a+b+c)^2\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$;
4) $(ab+bc+ac)^2\geqslant 3abc(a+b+c)$.

Краткое содержание курса алгебры VII класса

1. Алгебраические выражения

Числовое выражение образуется из чисел с помощью знаков действий и скобок.

Например, $1{,}2 \cdot (-3) - 9 : (0{,}5 + 1{,}5)$ — числовое выражение.

Порядок выполнения действий.

Действия первой ступени — сложение и вычитание.

Действия второй ступени — умножение и деление.

Действия третьей ступени — возведение в степень.

1) Если выражение не содержит скобок, то сначала выполняют действия третьей ступени, затем действия второй ступени и, наконец, действия первой ступени; при этом действия одной и той же ступени выполняют в том порядке, в котором они записаны.

2) Если выражение содержит скобки, то сначала выполняют все действия над числами, заключенными в скобках, а затем все остальные действия; при этом выполнение действий над числами в скобках и вне скобок производится в порядке, указанном в п. 1).

3) Если вычисляется значение дробного выражения, то сначала выполняются действия в числителе дроби и в знаменателе, а затем первый результат делится на второй.

4) Если выражение содержит скобки, заключенные внутри других скобок, то сначала выполняются действия во внутренних скобках.

Алгебраическое выражение образуется из чисел и букв с помощью знаков действий и скобок.

Примеры алгебраических выражений:

$$2(m+n); \quad 3a + 2ab - 1; \quad (a-b)^2; \quad \frac{2x+y}{3}.$$

Числовое значение алгебраического выражения — число, полученное в результате вычислений после замены в этом выражении букв числами.

Например, числовое значение выражения $3a + 2ab - 1$ при $a = 2$ и $b = 3$ равно

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 1 = 17.$$

Алгебраическая сумма — запись, состоящая из нескольких алгебраических выражений, соединенных знаками «+» или «−».

Правила раскрытия скобок.

1) Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки и знак «+» перед скобками можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы.

Например,

$$14 + (7 - 23 + 21) = 14 + 7 - 23 + 21,$$
$$a + (b - c - d) = a + b - c - d.$$

2) Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма, заключенная в скобки, то скобки и знак «−» перед скобками можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы на противоположный.

Например,

$$14 - (7 - 23 + 21) = 14 - 7 + 23 - 21,$$
$$a - (b - c - d) = a - b + c + d.$$

2. Уравнение первой степени с одним неизвестным

Уравнение — равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Пример уравнения:

$$2x + 3 = 3x + 2,$$

где x — неизвестное число, которое нужно найти.

Корень уравнения — значение неизвестного, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Например, число 3 является корнем уравнения $x + 1 = 7 - x$, так как $3 + 1 = 7 - 3$.

Решить уравнение — это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Линейное уравнение — уравнение вида $ax = b$, где a и b — заданные числа, x — неизвестное.

Основные свойства уравнений.

1. Любой член уравнения можно перенести из одной части в другую, изменив его знак на противоположный.

2. Обе части уравнения можно умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

3. Одночлены и многочлены

Степень числа *a* с натуральным показателем *n*, большим единицы, — произведение *n* множителей, равных *a*, т. е.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

Например,

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2,\ m^5 = m \cdot m \cdot m \cdot m \cdot m.$$

В записи степени a^n число a — основание степени, n — показатель степени.

Например, в записи степени 2^3 число 2 — основание степени, число 3 — показатель степени.

Первая степень числа — само число: $a^1 = a$. Например, $3^1 = 3$, $\left(\frac{1}{13}\right)^1 = \frac{1}{13}$.

Квадрат числа — степень этого числа с показателем 2. Например, 5^2 — квадрат числа 5.

Куб числа — степень этого числа с показателем 3. Например, 4^3 — куб числа 4.

Основные свойства степени.

1) При умножении степеней с равными основаниями основание остается прежним, а показатели степеней складываются:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

2) При делении степеней с равными основаниями основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

3) При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели перемножаются:

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

4) При возведении в степень произведения в эту степень возводится каждый множитель:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

5) При возведении в степень дроби в эту степень возводятся числитель и знаменатель:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Стандартный вид числа, большего 10, — запись числа в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — натуральное число.

Например,

$$358 = 3{,}58 \cdot 10^2;\ 4084{,}5 = 4{,}0845 \cdot 10^3.$$

Одночлен — произведение числовых и буквенных множителей.
Примеры одночленов:

$$3ab,\ -2ab^2c^3,\ a^2,\ a,\ 0{,}6xy5y^2,\ -t^4.$$

Например, числовыми множителями одночлена

$$3a^2(0{,}4)\cdot b\cdot(-5)c^3$$

являются: 3; 0,4; −5, а буквенными — a^2, b, c^3.

Одночлен стандартного вида — одночлен, который содержит только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями.

Чтобы записать одночлен в стандартном виде, нужно перемножить все его числовые множители и результат поставить на первое место, затем произведения степеней с одинаковыми буквенными основаниями записать в виде степеней.

Коэффициент одночлена — числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде.

Например, коэффициент одночлена $\frac{3}{4}abc^2$ равен $\frac{3}{4}$, коэффициент одночлена $-7a^3b$ равен −7, коэффициент одночлена a^2bc равен 1, коэффициент одночлена $-ab^2$ равен −1.

Многочлен — алгебраическая сумма нескольких одночленов.

Примеры многочленов: $4ab^2c^3$ — одночлен; $2ab-3bc$ — двучлен; $4ab+3ac-bc$ — трехчлен.

Члены многочленов — одночлены, из которых состоит многочлен. Например, членами многочлена $2ab^2-3a^2c+7bc-4bc$ являются одночлены $2ab^2$, $-3a^2c$, $7bc$, $-4bc$.

Подобные члены — одночлены, которые после приведения к стандартному виду отличаются только коэффициентами, или одинаковые одночлены. Например в многочлене $2ab-3ba+c^2b+c^2b$ подобными членами являются $2ab$ и $3ba$, c^2b и c^2b.

Приведение подобных членов — упрощение многочлена, при котором алгебраическая сумма подобных одночленов заменяется одним одночленом.

Например,

$$2ab-4bc+ac+3ab+bc=5ab-3bc+ac.$$

Стандартный вид многочлена — запись многочлена, в которой все члены записаны в стандартном виде и среди них нет подобных.

Действия над одночленами и многочленами.

1) Чтобы записать алгебраическую сумму нескольких многочленов в виде многочлена стандартного вида, нужно раскрыть скобки и привести подобные члены.

Например,

$$(2a^2b-3bc)+(a^2b+5bc)-(3a^2b-bc)=$$
$$=2a^2b-3bc+a^2b+5bc-3a^2b+bc=3bc.$$

2) Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена умножить на этот одночлен и полученные произведения сложить.

Например,

$$(2ab-3bc)(4ac)=(2ab)(4ac)+(-3bc)(4ac)=8a^2bc-12abc^2.$$

3) Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Например,

$$(5a-2b)(3a+4b)=(5a)(3a)+(5a)(4b)+(-2b)(3a)+$$
$$+(-2b)(4b)=15a^2+14ab-8b^2.$$

4) Чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Например,

$$(4a^3b^2-12a^2b^3):(2ab)=$$
$$=(4a^3b^2):(2ab)+(-12a^2b^3):(2ab)=2a^2b-6ab^2.$$

4. Разложение многочленов на множители

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b).$$

Разложение многочлена на множители — представление многочлена в виде произведения двух или нескольких многочленов. Например,

$$3ax+6ay=3a(x+2y).$$

При разложении многочлена на множители используются следующие способы.

1) **Вынесение общего множителя за скобку.** Например,

$$3ax+6ay=3a(x+2y).$$

2) **Способ группировки.** Например,

$$a^3-2a^2-2a+4=(a^3-2a^2)-(2a-4)=$$
$$=a^2(a-2)-2(a-2)=(a-2)(a^2-2).$$

3) **Применение формул сокращенного умножения.** Например,

$$9x^2-\frac{1}{16}y^2=\left(3x-\frac{1}{4}y\right)\left(3x+\frac{1}{4}y\right),$$
$$27x^3+8y^6=(3x+2y^2)(9x^2-6xy^2+4y^4),$$
$$z^2-14z+49=(z-7)^2.$$

5. Алгебраические дроби

Алгебраическая дробь — дробь, числитель и знаменатель которой — алгебраические выражения.

Примеры алгебраических дробей: $\frac{a^2+b}{c}$, $\frac{3x-2y}{a+1}$.

Предполагается, что буквы, употребляемые в записи алгебраической дроби, могут принимать только такие значения, при которых знаменатель этой дроби не равен нулю.

Основное свойство дроби: при умножении числителя и знаменателя дроби на одно и то же алгебраическое выражение получается равная ей дробь.

Например,

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{(a-b)(a-b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{(a-b)^2}{a^2-b^2}.$$

Используя основное свойство дроби, можно сокращать алгебраическую дробь на общий множитель числителя и знаменателя.

Например,

$$\frac{x^2-1}{x^3-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Сложение и вычитание алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей.

Для нахождения алгебраической суммы двух или нескольких дробей эти дроби приводят к общему знаменателю и используют правило сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, общий знаменатель дробей $\frac{1}{a^2b}$ и $\frac{1}{ab^2}$ равен a^2b^2, поэтому

$$\frac{1}{a^2b} + \frac{1}{ab^2} = \frac{b}{a^2b^2} + \frac{a}{a^2b^2} = \frac{b+a}{a^2b^2}.$$

Умножение и деление алгебраических дробей проводятся по тем же правилам, которые применяются для числовых дробей. Например,

$$\frac{2a}{3b} \cdot \frac{b^2}{4a} = \frac{2ab^2}{3b \cdot 4a} = \frac{1}{6}b,$$

$$\frac{x^2-y^2}{2xy} : \frac{x+y}{4x} = \frac{(x^2-y^2) \cdot 4x}{2xy(x+y)} = \frac{2(x-y)}{y}.$$

6. Линейная функция и ее график

Прямоугольная система координат на плоскости — две взаимно перпендикулярные прямые с выбранными направлениями и единицей длины.

Эти прямые называются осями координат: прямая, изображаемая горизонтально, — осью абсцисс, а прямая, изображаемая вертикально, — осью ординат.

Начало координат обозначается буквой O, ось абсцисс — Ox, ось ординат — Oy.

Координатная плоскость — плоскость, на которой выбрана система координат.

Функция. Если каждому значению x из некоторого множества чисел поставлено в соответствие по некоторому правилу число y, то говорят, что на этом множестве определена функция.

При этом x называют независимой переменной, а $y(x)$ — зависимой переменной, или функцией.

Линейная функция — функция вида $y = kx + b$, где k и b — заданные числа.

График функции $y(x)$ — множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x;\ y(x))$.

Например, график функции $y(x) = 2x + 1$ — множество всех точек плоскости с координатами $(x;\ 2x + 1)$.

График линейной функции $y = kx + b$ — прямая. При $b = 0$ функция принимает вид: $y = kx$, ее график проходит через начало координат.

Прямая пропорциональная зависимость: $y = kx$, где $k > 0$, $x > 0$, k — коэффициент пропорциональности.

Например, в формуле $s = vt$ путь s прямо пропорционален времени t при постоянной скорости v.

Обратная пропорциональная зависимость: $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$, $x > 0$, k — коэффициент обратной пропорциональности.

Например, в формуле $V = \frac{m}{\rho}$ объем газа V обратно пропорционален плотности ρ при постоянной массе m.

7. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Общий вид системы линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — заданные числа, x, y — неизвестные числа.

Решение системы — пара чисел x, y, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

Например, решением системы

$$\begin{cases} 4x - y = 2, \\ 5x + y = 7 \end{cases}$$

является пара чисел $x = 1$, $y = 2$.

Решить систему — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

При решении систем уравнений применяются следующие способы.

1) Способ подстановки.

Из какого-нибудь уравнения одно из неизвестных выражают через другое и подставляют в другое уравнение системы.

2) Способ алгебраического сложения.

Уравняв модули коэффициентов при одном из неизвестных, почленным сложением или вычитанием уравнений системы исключают это неизвестное.

3) Графический способ.

В одной системе координат строят графики уравнений системы; по взаимному расположению прямых определяют число решений системы; находят координаты общих точек графиков (если они имеются).

8. Комбинаторика

Правило произведения. Если существует n вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть m вариантов выбора второго элемента, то всего существует $n \cdot m$ различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Например, с помощью букв a, b и c можно составить $3 \cdot 3 = 9$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы могут повторяться, и $3 \cdot 2 = 6$ различных двухбуквенных кодов, в которых буквы должны быть различными.

Краткое содержание курса алгебры VIII класса

1. Неравенства

Неравенство $a > b$ означает, что разность $a - b$ положительна, т. е. $a - b > 0$.

Неравенство $a < b$ означает, что разность $a - b$ отрицательна, т. е. $a - b < 0$.

Для любых двух чисел a и b только одно из следующих трех соотношений является верным: $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Сравнить числа a и b — значит выяснить, какой из знаков $>$, $=$, $<$ нужно поставить между этими числами, чтобы получить верное соотношение.

Основные свойства числовых неравенств:

1. Если $a > b$, то $b < a$.
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
3. Если прибавить к обеим частям неравенства или вычесть из них одно и то же число, то знак неравенства не изменится: если $a > b$, то $a + c > b + c$ и $a - c > b - c$ для любого числа c.

Любое слагаемое можно перенести из одной части неравенства в другую, изменив знак этого слагаемого на противоположный.

4. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то знак неравенства не изменится. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, то знак неравенства изменится на противоположный.

Если $a > b$, то

$$ac > bc \text{ и } \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \text{ при } c > 0, \quad ac < bc \text{ и } \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \text{ при } c < 0.$$

5. **Сложение неравенств.** Неравенства одинакового знака можно складывать, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.

6. **Умножение неравенств.** Неравенства одинакового знака, у которых левые и правые части положительны, можно перемножать, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b$, $c > d$ и a, b, c, d — положительные числа, то $ac > bd$.

7. **Возведение неравенства в степень.** Неравенство, у которого левые и правые части положительны, можно возводить в натуральную степень, при этом получается неравенство того же знака: если $a > b > 0$, то $a^n > b^n$ при любом натуральном n.

Строгие неравенства — неравенства со знаками > (больше) и < (меньше).

Например, $5 > 3$, $x < 1$.

Нестрогие неравенства — неравенства со знаками $\geqslant$ (больше или равно) и $\leqslant$ (меньше или равно).

Например, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$.

Нестрогое неравенство $a \geqslant b$ означает, что $a > b$ или $a = b$.

Свойства нестрогих неравенств такие же, как и свойства строгих неравенств. При этом в свойствах строгих неравенств противоположными считаются знаки > и <, а в свойствах нестрогих неравенств — знаки $\geqslant$ и $\leqslant$.

Неравенство с одним неизвестным — это неравенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой.

Примеры неравенств с одним неизвестным:

$$3x + 4 < 5x - 2; \quad \frac{1}{3}x - 1 \leqslant \frac{3 - x}{4}.$$

Решение неравенства с одним неизвестным — значение неизвестного, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, число 3 является решением неравенства $x + 1 > 2 - x$, так как $3 + 1 > 2 - 3$ — верное неравенство.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Система неравенств с одним неизвестным — это два или несколько неравенств, содержащих одно и то же неизвестное число и рассматриваемых совместно.

Примеры систем неравенств с одним неизвестным:

$$\begin{cases} 2(x-1) > 3, \\ 3x + 4 > 1 - x; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2 \leqslant 5x, \\ 3(x-1) > 4, \\ x - 4 \leqslant 7. \end{cases}$$

Решение системы неравенств — то значение неизвестного, при котором все неравенства системы обращаются в верные числовые неравенства.

Например, число 2 является решением системы

$$\begin{cases} 3x - 4 < 2x, \\ x + 2 > 3, \end{cases}$$

так как $3 \cdot 2 - 4 < 2 \cdot 2$, $2 + 2 > 3$ — верные неравенства.

Решить систему неравенств — это значит найти все ее решения или установить, что их нет.

Числовые промежутки — отрезки, интервалы и полуинтервалы.

Отрезок $[a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, где $a < b$.

Например, отрезок $[2; 5]$ — это множество чисел, удовлетворяющих неравенствам $2 \leqslant x \leqslant 5$.

Интервал $(a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, где $a < b$.

Например, интервал $(-2; 3)$ — это множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $-2 < x < 3$.

Интервалами называют и множества чисел x, удовлетворяющих неравенствам вида $x > a$ или $x < a$.

Полуинтервал $[a; b)$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$; полуинтервал $(a; b]$ — множество чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x \leqslant b$, где $a < b$.

Например, $[3; 8)$ — множество чисел x, таких, что $3 \leqslant x < 8$; $(-4; 2]$ — множество чисел x, таких, что $-4 < x \leqslant 2$.

Модуль числа a (обозначается $|a|$) определяется формулой

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрически $|a|$ — расстояние от точки 0 до точки, изображающей число a.

Для любого числа a выполняется неравенство $|a| \geqslant 0$, причем $|a| = 0$ только при $a = 0$.

Неравенству $|x| \leqslant a$, где $a > 0$, удовлетворяют числа x из отрезка $[-a; a]$, т. е. такие числа x, что $-a \leqslant x \leqslant a$.

Неравенству $|x| < a$, где $a > 0$, удовлетворяют числа x из интервала $(-a; a)$, т. е. такие числа x, что $-a < x < a$.

Неравенству $|x| \geqslant a$, где $a > 0$, удовлетворяют все числа $x \leqslant -a$ и числа $x \geqslant a$.

Неравенству $|x| > a$, где $a > 0$, удовлетворяют все числа $x < -a$ и числа $x > a$.

2. Приближенные вычисления

Абсолютная погрешность приближения — модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением. Если a — приближенное значение, а x — точное, то абсолютная погрешность равна $|x - a|$.

Запись $x = a \pm h$ означает, что абсолютная погрешность приближения не превосходит h, т. е. $|x - a| \leqslant h$, или $a - h \leqslant x \leqslant a + h$.

При этом говорят, что x равно a с точностью до h. Например, запись $\pi = 3{,}14 \pm 0{,}01$ означает, что $|\pi - 3{,}14| \leqslant 0{,}01$, т. е. число π равно 3,14 с точностью до 0,01.

Стандартный вид числа — это запись его в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$, n — целое число. Например,

$$348 = 3{,}48 \cdot 10^2, \quad 0{,}027 = 2{,}7 \cdot 10^{-2}.$$

При округлении числа с недостатком с точностью до 10^{-n} сохраняются n первых знаков после запятой, а последующие отбрасываются.

Например, при округлении числа 17,2397 с недостатком до тысячных, т. е. до 10^{-3}, получаем 17,239, до сотых — 17,23, до десятых — 17,2.

При округлении числа с избытком с точностью до 10^{-n} n-й знак после запятой увеличивается на единицу, а все последующие отбрасываются.

Например, при округлении числа 2,5143 с избытком до тысячных получаем 2,515, до сотых — 2,52, до десятых — 2,6.

Погрешность округления в обоих случаях не превосходит 10^{-n}.

Округление с наименьшей погрешностью: если первая отбрасываемая цифра данного числа меньше 5, то округляют с недостатком, а если эта цифра больше или равна 5, то округляют с избытком. Например, при округлении числа 8,351 до сотых получаем 8,35, а при округлении до десятых — 8,4.

Запись $x \approx a$ означает, что число a является приближенным значением числа x. Например, $\sqrt{2} \approx 1{,}41$.

Относительная погрешность — частное от деления абсолютной погрешности на модуль приближенного значения. Если x — точное значение, a — приближенное, то относительная погрешность равна

$$\frac{|x-a|}{|a|}.$$

Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

Например, если точное значение величины равно 1,95, а приближенное равно 2, то относительная погрешность приближения равна

$$\frac{|2-1{,}95|}{2} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025, \text{ или } 2{,}5\%.$$

3. Квадратные корни

Квадратный корень из числа a — такое число, квадрат которого равен a.

Например, 6 — квадратный корень из числа 36; число −6 также квадратный корень из числа 36.

Извлечение квадратного корня — действие нахождения квадратного корня. Извлечь квадратный корень можно только из неотрицательного числа.

Арифметический квадратный корень из числа a (обозначается $\sqrt{a}$) — неотрицательное число, квадрат которого равен a.

Например, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{144}=12$.

Выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл только для $a \geqslant 0$, при этом

$$\sqrt{a} \geqslant 0, \ (\sqrt{a})^2 = a.$$

Тождество — равенство, справедливое при любых значениях входящих в него букв.

Равенство $\sqrt{a^2} = |a|$ является тождеством, так как выполняется при любом a.

Например, $\sqrt{(25)^2} = |25| = 25$, $\sqrt{(-15)^2} = |-15| = 15$.

Если $a > b > 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Например, $\sqrt{17} > \sqrt{13}$, так как $17 > 13 > 0$.

Свойства квадратных корней:

1) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Например, $\sqrt{144 \cdot 196} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{196} = 12 \cdot 14 = 168$.

2) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, если $a \geqslant 0$, $b > 0$.

Например, $\sqrt{\frac{169}{225}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{225}} = \frac{13}{15}$.

3) *Вынесение множителя из-под знака корня:*

$$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}, \text{ если } a \geqslant 0, \ b \geqslant 0.$$

4) *Внесение множителя под знак корня:*

$$a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}, \text{ если } a \geqslant 0, \ b \geqslant 0.$$

Среднее арифметическое двух чисел a и b — число $\frac{a+b}{2}$.

Среднее геометрическое двух положительных чисел a и b — число $\sqrt{ab}$.

Среднее арифметическое двух положительных чисел не меньше среднего геометрического этих чисел:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}, \text{ если } a > 0, \ b > 0.$$

Рациональное число — число вида $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби.

Например, $\frac{2}{5} = 0{,}4$; $-\frac{1}{3} = -0{,}333\ldots = -0{,}(3)$.

Иррациональное число — бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Например, 0,1001000100001... .

Иррациональными числами являются также числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \pi$.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество **действительных чисел**.

Каждое иррациональное число можно приближенно заменить конечной десятичной дробью, т. е. рациональным числом.

Например, число π можно приближенно заменить числом 3,14; $\sqrt{2}$ приближенно равен 1,41.

На практике при вычислениях с иррациональными числами выполняются действия над их рациональными приближениями.

Например, так как $\sqrt{2} \approx 1{,}4$, $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, то $\sqrt{2} + \sqrt{3} \approx 3{,}1$.

Для приближенного нахождения квадратных корней используют таблицы или вычислительные машины.

4. Квадратные уравнения

Квадратное уравнение — уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b и c — заданные числа, причем $a \neq 0$, x — неизвестное.

Коэффициенты квадратного уравнения называют так: a — первый или старший коэффициент, b — второй коэффициент, c — свободный член.

Примеры квадратных уравнений: $2x^2 - x - 1 = 0$, $3x^2 + 7 = 0$.

Неполное квадратное уравнение — квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, у которого хотя бы один из коэффициентов b или c равен нулю.

Примеры неполных квадратных уравнений: $x^2 = 0$, $5x^2 + 4 = 0$, $8x^2 + x = 0$.

Уравнение вида $x^2 = d$, где $d > 0$, имеет два действительных корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{d}$. Если $d = 0$, то уравнение $x^2 = 0$ имеет один корень $x = 0$ (два равных корня).

Если $d < 0$, то уравнение $x^2 = d$ имеет два комплексных корня $x_{1,2} = \pm\sqrt{|d|} \cdot i$ (i — такое число, что $i^2 = -1$).

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b и c — действительные числа, имеет корни x_1, x_2 (действительные или комплексные), которые находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Например:

1) уравнение $3x^2 + 5x - 2 = 0$ имеет два действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}, \text{ т. е. } x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -2;$$

2) уравнение $x^2-6x+25=0$ имеет два комплексных корня:

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-100}}{2}=3\pm 4i.$$

Приведенное квадратное уравнение — уравнение

$$x^2+px+q=0.$$

Формула корней приведенного квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Например, корни уравнения $x^2-6x-7=0$ таковы:

$$x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+7}=3\pm 4, \text{ т. е. } x_1=7,\ x_2=-1.$$

Теорема Виета. Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а их произведение равно свободному члену: если x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то

$$x_1+x_2=-p,\quad x_1x_2=q.$$

Теорема, обратная теореме Виета. Если числа p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

Квадратный трехчлен — многочлен ax^2+bx+c, где $a\neq 0$.

Разложение квадратного трехчлена на множители — представление его в виде

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Например, $2x^2+3x-2=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)$.

Комплексное число — выражение вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, $i^2=-1$; a — действительная часть, b — мнимая часть комплексного числа $a+bi$.

Равенство комплексных чисел: $a+bi=c+di$, если $a=c$, $b=d$.

Арифметические действия над комплексными числами выполняются так же, как действия над многочленами, считая, что $i^2=-1$.

Сопряженные комплексные числа — числа $a+bi$ и $a-bi$.

5. Квадратичная функция

Квадратичная функция — функция вида $y=ax^2+bx+c$, где a, b, c — заданные действительные числа, $a\neq 0$, x — действительная переменная.

Нули квадратичной функции — значения x, при которых она обращается в нуль.

Например, функция $y=x^2-2x-3$ имеет нули: $x_1=-1$, $x_2=3$.

Графиком квадратичной функции является парабола.

В частности, графиком функции $y = x^2$ является парабола с вершиной в точке (0; 0); ось симметрии параболы — ось ординат.

В общем случае вершиной параболы $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$ является точка $(x_0; y_0)$, где $x_0 = \frac{-b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$. Ось симметрии параболы — прямая, параллельная оси ординат и проходящая через вершину параболы (см. рис. 44).

Параболу $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$ можно получить сдвигом параболы $y = ax^2$ вдоль координатных осей.

Схема построения графика квадратичной функции

$$y = ax^2 + bx + c:$$

1. Построить вершину параболы $(x_0; y_0)$, вычислив x_0, y_0 по формулам $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.

2. Провести через вершину параболы прямую, параллельную оси ординат, — ось симметрии параболы.

3. Найти нули функции, если они есть, и построить на оси абсцисс соответствующие точки параболы.

4. Построить две какие-нибудь точки параболы, симметричные относительно ее оси, например точки с абсциссами $x = 0$ и $x = 2x_0 = -\frac{b}{a}$ и ординатой $y = c$.

5. Построить дополнительно еще две точки параболы. Провести через построенные точки параболу (рис. 67).

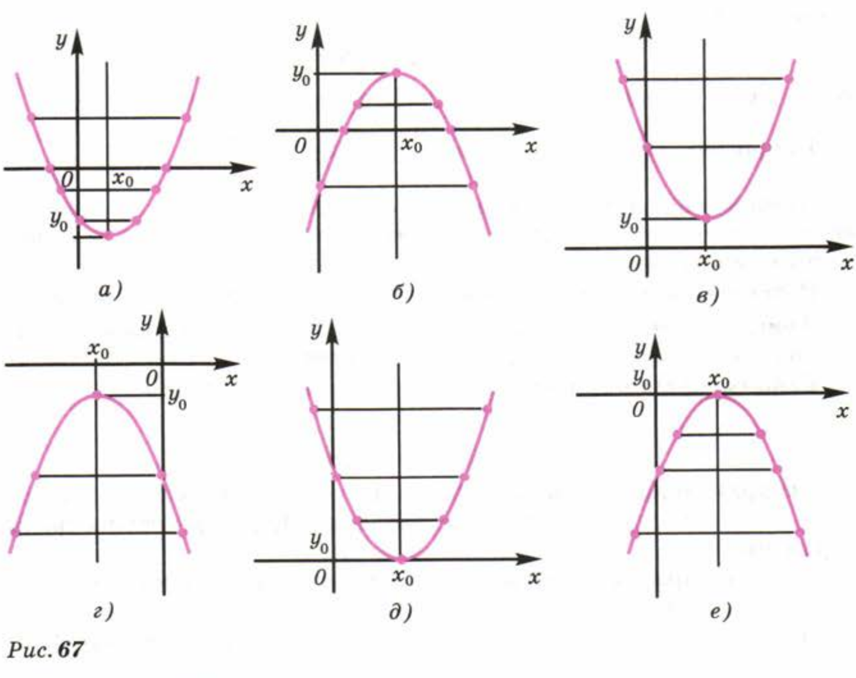


Рис. **67**

Наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции. Функция $y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$ принимает наименьшее (если $a > 0$) или наибольшее (если $a < 0$) значение, равное $y_0 = y(x_0)$, при $x = x_0 = -\frac{b}{2a}$.

6. Квадратные неравенства

Квадратное неравенство — неравенство, в левой части которого стоит квадратный трехчлен, а в правой — нуль.

Примеры квадратных неравенств:

$$x^2 - x + 2 > 0,\ 2x^2 - 3x - 4 \leqslant 0.$$

Решение квадратного неравенства — значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Например, значение $x = 1$ — решение неравенства $x^2 - x + 2 > 0$, так как $1 - 1 + 2 > 0$ — верное неравенство.

Решить неравенство — это значит найти все его решения или установить, что их нет.

Для решения квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции нужно:

1) определить направление ветвей параболы по знаку первого коэффициента;

2) найти корни, если они есть, соответствующего квадратного уравнения;

3) изобразить эскиз графика и с его помощью определить промежутки, где функция принимает положительные (неотрицательные) или отрицательные (неположительные) значения.

Решение неравенств методом интервалов рассмотрим на примере неравенства

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) < 0,$$

где x_1, x_2, x_3 — заданные числа, $x_1 < x_2 < x_3$. Точки x_1, x_2, x_3 разбивают всю числовую ось на четыре интервала (рис. 68). На каждом интервале сохраняет знак левая часть неравенства и при переходе к соседнему интервалу знак левой части меняется на противоположный. Так как при $x > x_3$ левая часть неравенства положительна, то решениями неравенства являются следующие значения x:

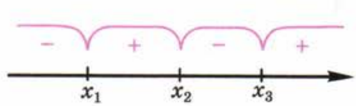


Рис. 68

$x < x_1$, $\quad x_2 < x < x_3$ (рис. 68.)

Ответы

5. 2) 18; 4) −2. **16.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 4) $x_1 = -4$, $x_2 = -5$. **17.** 2) $x_1 = -1{,}5$, $x_2 = -1$; 4) $x_1 = \frac{3}{5}$, $x_2 = -\frac{2}{3}$. **18.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{4}{3}$. **19.** 2) $x_1 = 4$, $x_2 = -4$; 4) $x_1 = \frac{4}{7}$, $x_2 = -\frac{4}{7}$. **20.** 2) $x = 1$; 4) $x = -\frac{1}{2}$. **21.** 2) $x = -1$; 4) $x = \frac{1}{3}$. **22.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 2$; 4) $x_1 = -3$, $x_2 = 2$; 6) $x = 3$. **23.** 2) $x_1 = 7$, $x_2 = -7$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{5}$. **24.** 1) $x = 10$; 2) $x = -\frac{1}{7}$; 3) корней нет; 4) корней нет. **26.** 1) −1;2) 0. **27.** 1) a^2; 2) 2. **28.** 2) $\frac{1}{3} > 0{,}3$; 4) $-\frac{5}{8} > -0{,}7$. **29.** 2) $b > a$; 4) $a < b$. **31.** 2) При $a = -0{,}8$ меньше, чем при $a = -\frac{5}{6}$. **34.** Первый. **36.** Указание. Доказать равенство $a^4 + b^4 - a^3 b - ab^3 = (a - b)^2 (a^2 + ab + b^2)$. **39.** 2) $a < 0$; 4) $a > 0$. **40.** 2) $-9 < -3$. **41.** 2) $a + 3b > -2b$. **42.** 2) $8 > 6$. **43.** 2) $a - 3b < 3a$. **44.** 2) $a - 5 < b - 5$. **47.** 2) $19 > 12$; 4) $-12 > -14$. **48.** 2) $a < -0{,}25$; 4) $a < 2$. **49.** 2) $0{,}9 > -2$; 4) $5 > 3$. **50.** 2) $a < -2$; 4) $x < -\frac{4}{9}$. **52.** 2) $0{,}19a < 0{,}19b$; 4) $-\frac{a}{6} > -\frac{b}{6}$; 6) $\frac{2}{3}(a - 5{,}2) < \frac{2}{3}(b - 5{,}2)$. **55.** 1) Да, при $b < 0$; 2) да, при $b > 0$; 3) да, при $b = 0$; 4) да, при $b < 0$; 5) да, при $a > 2b$; 6) да, при $a = 2b$. **58.** 1) Нет, верно только при $b > 0$; 2) нет, верно только при $b > 0$; 3) нет, верно только при $ab > 0$; 4) верно. **60.** 2) $-5 < 7$; 4) $7y > 1$. **61.** 2) $25 < 58$; 4) $12 < 4x^2 - 1$. **75.** 2) $n = 3$; 4) $n = -6$; 6) $n = -1$. **76.** 2) $n = 6$; 4) $n = -3$; 6) $n = 4$. **77.** 2) $x = -9$. **78.** 2) $h \geqslant 5$; 4) $v \leqslant 60$. **79.** 2) Верно; 4) неверно. **80.** 2) Верно; 4) неверно. **84.** 2) $13 - x < 2$; 4) $2(x - 3) \leqslant 2$; 6) $2x(-4) \geqslant x - (-4)$. **85.** 2) −2; −5;

4) $\frac{1}{2}$; 0; −1; −2; −5. **86.** 2) $y>0$; 4) при любом y; 6) $y\neq -2$. **87.** 2) $y<2$; 4) $y\leqslant 0$. **88.** 2) $x\leqslant -3$; 4) $x>0$; 6) $x<0$. **90.** 2) $x<14$; 4) $y>9$; 6) $z\leqslant 4$. **91.** 2) $x\geqslant -8$; 4) $z>-15$; 6) $x\leqslant -2$. **92.** 2) $x<6$; 4) $x>5$; 6) $x\leqslant -2$. **93.** 2) $x\geqslant 3$; 4) $x>0$; 6) $x\geqslant 2$. **94.** 2) $x<\frac{5}{8}$; 4) $x<-3$; 6) $x<5\frac{1}{6}$. **95.** 2) $y>\frac{3}{8}$; 4) $y<\frac{5}{8}$; 6) $y>\frac{2}{3}$. **96.** 2) $y=4$; 4) $x=0$. **97.** 2) $x=-1$; 4) $x=-4$. **98.** 2) $x>2{,}5$; 4) $y>-4$. **99.** 2) $x\geqslant\frac{1}{3}$; 4) $x>\frac{5}{11}$. **100.** 2) $b<-5\frac{2}{3}$; 4) $x>-1\frac{3}{7}$. **101.** 2) x — любое число; 4) x — любое число; 6) x — любое число. **102.** 2) Решений нет; 4) решений нет. **103.** 2) $x<1\frac{1}{6}$; 4) $x\leqslant 6$. **104.** 2) $x>2$; 4) $x>-20$; 6) $x>0{,}5$. **105.** 2) $x<1{,}6$; 4) $x<0$. **106.** 2) $x\leqslant 7$; 4) $x\leqslant 5$. **107.** 2) $x<0{,}5$; 4) $x>-0{,}5$. **108.** Не менее 37 платформ. **109.** Не менее 43 деталей. **110.** 2) 20 см. **111.** 11. **112.** 14. **113.** Не менее 16 км/ч. **114.** Больше 31 км/ч. **115.** $x>-0{,}7$. **116.** $x<2$. **117.** На 63 см. **118.** 2) 10; 12. **119.** 2) 1; 2. **120.** 2) 0; 1; 2; 3; 4) −5; −4; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 4; 5. **121.** 2) [−1; 3]; 4) (1; 2); 6) (−4; −2]. **122.** 2) $-3\leqslant x\leqslant -1$; 4) $0<x<3$; 6) $-2\leqslant x<2$. **123.** б) $-1<x<2$, $(-1;\ 2)$; г) $-4<x\leqslant 0$, $(-4;\ 0]$. **124.** Да. **125.** Да. **127.** б) $-3<x<1$; таких значений x не существует; г) $-5<x<0$; таких значений x не существует. **128.** 1) $x\leqslant 0{,}6$; 2) $x\leqslant -\frac{1}{3}$; 3) $x\geqslant -3{,}5$; 4) $x\geqslant -4{,}5$. **129.** 2) $x>0$; 4) $x\geqslant -2$. **130.** 2) $x<-1$; 4) $x\leqslant 0$. **131.** 2) $3<x<6$; 4) $0\leqslant x<\frac{1}{2}$. **132.** 2) $-1{,}5\leqslant x<1{,}5$; 4) $-0{,}5\leqslant x\leqslant 7{,}5$. **133.** 2) $x\geqslant 4$; 4) $x>-3$. **134.** 2) $x\leqslant -2$; 4) $x<4$. **135.** 2) $x\leqslant -2{,}5$; 4) $2\leqslant x\leqslant 5$. **136.** 2) $-5<x\leqslant -1$; 4) $0<x\leqslant\frac{4}{3}$. **137.** 2) $-0{,}5<x\leqslant 2$; 4) $x>0$. **138.** 2) $2{,}1<x\leqslant 3{,}5$; 4) $4{,}5<x<6{,}5$. **139.** 2) $x>-17$. **140.** 2) $-4\leqslant x\leqslant 13$; 4) $-2<x<1$. **141.** 2) 1; 2; 4) 4; 5. **142.** 2) Таких значений x не существует; 4) $0<x<2$. **143.** 2) $x\leqslant -2$; 4) $x\leqslant 6$. **144.** 2) Больше 4 м, но меньше 13 м. **145.** 24. **146.** 36. **147.** Не меньше 8 л, но не больше 24 л. **148.** Риса больше 20 кг, но не больше 40 кг; ячменя больше 80 кг, но не больше 160 кг. **150.** 2) $x_{1,2}=\pm 1{,}5$; 4) $x_1=0$, $x_2=-6$. **151.** 2) $x=2$; 4) $x=\frac{3}{4}$. **152.** 2) $x_1=-0{,}25$, $x_2=-1{,}25$; 4) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. **153.** 2) $x_{1,2}=\pm 2{,}1$; 4) $x_1=-5$, $x_2=11$; 6) $x_1=0$, $x_2=1{,}5$. **155.** 2) $-2<x<2$. **156.** 2) $|x|\leqslant 0{,}3$. **157.** 2) $-2{,}2<x<-1{,}8$; 4) $\frac{1}{4}<x<1\frac{3}{4}$. **158.** 2) $-3<x<0$; 4) $1\leqslant x\leqslant 1{,}5$. **159.** 2) $x\leqslant 0{,}9$, $x\geqslant 3{,}1$; 4) $x<2\frac{1}{3}$, $x>3\frac{2}{3}$. **160.** 2) $x<-1$, $x>-\frac{1}{3}$; 4) $x\leqslant 0$, $x\geqslant 1{,}6$. **161.** 2) −1; 0; 4) 0; 1. **162.** 2) $-1\leqslant x\leqslant 1\frac{2}{3}$; 4) $x\leqslant 0$, $x\geqslant 3$; 6) $x\leqslant -2$, $x\geqslant 5$. **163.** 2) $\frac{2}{3}\leqslant x<1\frac{1}{3}$; 4) $-3\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant -3$. **164.** 2) $x\leqslant 2$. **165.** 2) Положительно; 4) отрицательно. **166.** 2) $a>0$; 4) $a<0$. **170.** 2) $x_1=0$, $x_2=1\frac{1}{3}$; 4) $x_1=-4$, $x_2=0{,}5$. **171.** 2) $x=0{,}5$; 4) $x_1=3$, $x_2=-2$. **172.** 2) $2+b-a>0$; 4) $a-3-b<0$. **178.** 2) y — любое число; 4) $x>7$. **179.** 2) $x<2$. **180.** б) $-3\leqslant x\leqslant 3$, $|x|\leqslant 3$; г) $0<x<4$, $|x-2|<2$; е) $-6<x<-2$, $|x+4|<2$. **181.** б) $|x|>2$; г) $|x-3|\geqslant 1$;

е) $|x+4|>1$. **182.** 2) $x_1=3{,}4$, $x_2=-1{,}4$; 4) $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$. **183.** 2) $x\leqslant-2{,}4$, $x\geqslant4{,}4$; 4) $x\leqslant-2$, $x\geqslant1$; 6) $x\leqslant-0{,}3$, $x\geqslant0{,}7$. **186.** 2), 4) таких значений не существует. **187.** 2) $x=4\frac{5}{9}$; 4) решений нет. **188.** 34. **189.** 47. **190.** 7 деталей. **191.** 24 места. **193.** Больше a км/ч, но не больше $2a$ км/ч. **194.** Не менее 15 л. **196.** 1) $x=1{,}5$; 2) $x=6{,}5$; 3) $x=0{,}5$; 4) $x=1$; 5) $x=-5$; 6) $x=-8$. **199.** 2) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{225}$. **200.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{350}$. **201.** 2) 0,08; 4) 0,08. **202.** 3°. **203.** $\frac{1}{7}$. **204.** Верно. **205.** $2{,}3<x<2{,}5$. **206.** $7{,}42<x<7{,}44$. **208.** 2) $141\leqslant m\leqslant143$; 4) $895\leqslant v\leqslant905$; 6) $m-n\leqslant y\leqslant m+n$. **209.** 2) 2,6 и 2,8; 4) −6,1 и −5,7. **210.** 2) Нет; 4) да. **211.** 2) Да; 4) нет. **212.** 2) 5,5; 4) 3,9; 6) 0,575. **217.** Нет. **222.** 2) 0,7; 4) 3,7. **223.** 2) 0,07; 4) 1,67; 6) 5,07. **224.** 2) 0,385; 4) 7,643. **225.** 1) В первом. **226.** 50 км/ч. **228.** 2) 0,41; ≈3,7%; 4) 0,108; 10,8%. **229.** 2) ≈2%. **230.** 2) Второе. **231.** ≈1%; 0,1%; 0,01%. **232.** Первый. **233.** 2) 0,000398. **234.** Второе. **235.** ≈0,22%. **236.** Первое. **239.** 2) 6; 0 — верные цифры, 7 — сомнительная цифра; 4), 6), 8) — все цифры верные. **240.** 2) $x=2{,}7\pm0{,}1$; 4) $x=4{,}3204\pm0{,}0001$; 6) $x=350\pm1$; 8) $x=2{,}4\cdot10^3\pm10^2$. **241.** 2) 11,3; 4,5; 4) 65,70; 12,76; 6) 9,4; 1,8. **242.** 2) 6,9; 3,7; 4) 15,1; 2,5. **243.** 2) 4,5; 2,7; 4) $8{,}2\cdot10^3$; $8{,}9\cdot10^{-4}$. **244.** 2) $10{,}8\cdot10^2$; $4{,}0\cdot10^2$; 4) $5{,}34\cdot10^3$; $2{,}86\cdot10^3$; 6) 177; 65. **245.** 2) 0,68; 0,00065; 4) $2{,}8\cdot10^8$; $1{,}6\cdot10^0$; 6) $1{,}886\cdot10^{-2}$; $1{,}756\cdot10^0$. **255.** 2) 14,004; 4) 2,615. **256.** 153,68 г. **257.** ≈4,72 м^3. **258.** 1414,08 мм^2. **259.** 2) −1,22. **261.** 2) $6\cdot10^{-8}$; 4) $3\cdot10^{-8}$. **262.** 2) $4{,}3024\cdot10^2$; 4) $3{,}6021\cdot10^3$; 6) $6{,}8345\cdot10^{-2}$; 8) $1{,}2345678\cdot10^7$. **263.** 2) $-4{,}53\cdot10^{-1}$; 4) $-4{,}50102\cdot10^2$; 6) $-3{,}54001\cdot10^0$; 8) $-1{,}2345678\cdot10^4$. **265.** 2) 0,23; 4) 0,0023. **266.** 2) 0,702; 4) 0,049. **267.** 2) $-1{,}4444\cdot10^8$; 4) $-2{,}8831\cdot10^{-3}$. **268.** 2) 40 238; 4) 554 764 530. **269.** 2) $1{,}828624\cdot10^{15}$; 4) 29,2521. **270.** 2) $3\cdot10^{16}$; 4) $\approx1{,}98\cdot10^2$. **271.** 1) 0,0014 г; 2) 1,4513 г; 3) 0,5077 г; 4) 0,0710 г. **272.** 1) 463,7; 2) −69,2. **273.** 2) 547,56; 4) 25 281; 6) $1{,}9881\cdot10^{-4}$. **274.** 2) $4{,}7619\cdot10^{-2}$; 4) $-7{,}1428\cdot10^{-2}$; 6) $-1{,}2315\cdot10^{-1}$; 8) 12,345679. **275.** 2) 9261; 4) 702,75; 6) $3{,}0389\cdot10^{-7}$; 8) 5,6689342. **276.** 2) 0,3075; 4) 25,575447; 6) 1,2458472. **277.** 3 667 225 м^2. **278.** 2) $7{,}8633047\cdot10^{-23}$. **279.** 1) 437,67; 2) 52,13. **280.** −1,37; −30,11; 1,77; 12,33. **281.** 2) ≈206; 4) ≈−9,625. **282.** 2) 0,3997638; 4) 0,2408157. **283.** ≈38,6 см; ≈70 см^2. **284.** ≈5,2 м. **285.** 2) 25575; 4) 453. **286.** 2) 0,98. **287.** 2) 3,08; 4) 15,7; 6) 2,25. **288.** 2) 45,4; 4) 3711,8. **289.** ≈29 к. **290.** ≈0,4 мм. **291.** ≈14 А. **292.** ≈1,60 Ом. **293.** ≈1,6 А. **294.** 2) 55 528 000; 4) $-2{,}1111\cdot10^{32}$. **295.** 2) $3{,}8261\cdot10^{16}$; 4) $1{,}2678\cdot10^{-3}$. **296.** 2) 4765; 4) 53,24427. **297.** 2) −3,9. **298.** 2) 64,102052. **299.** $\approx3{,}5\cdot10^{-5}$ Ом. **300.** ≈67 Дж. **301.** $\approx1{,}5\cdot10^5$ Дж. **302.** $1{,}88\cdot10^4$; $2{,}04\cdot10^4$; $1{,}32\cdot10^4$; $4{,}60\cdot10^3$. **303.** 2) −0,5843. **304.** 4,2; 2,7; 2,4; 2,2. **305.** 3593,1 ккал. **306.** 2) 10 дм; 4) $\frac{6}{7}$ мм. **307.** 9; 8; 10; 0,4; 0,3; 0,5; 1,2; 70; 80. **308.** 2) Верно; 4) верно. **309.** 2) 9; 4) 0,25. **310.** 2) 2; 4) 0,4; 6) 0,125. **311.** 2) 9; 4) 5; 6) 8. **312.** 2) 10; 0; 20. **313.** 2) $a\leqslant0$; 4) $a\geqslant-3$. **314.** 2) $x=100$. **315.** 2) $\sqrt{0{,}04}<\sqrt{0{,}09}$. **317.** 2) 0,008; 4) 0,(27); 6) −3,(142857). **318.** 2) $\frac{7}{9}$; 4) $\frac{131}{55}$. **319.** 2) $1{,}03<1{,}0(3)$;

4) 3,7(2) > 3,72. **322.** 2) 3,606; 4) 2,074; 6) 0,224. **323.** 3 м 46 см. **324.** 4) 28; 6) 12,4. **325.** 2) 47,5; 4) 177,5. **326.** 1) 2,66; 2) 1,44; 3) 3,27; 4) 3,13. **327.** 2) Верно; 4) верно. **328.** 2) 2; 4) 2. **329.** 2) 16; 4) 121; 6) 125. **330.** 2) x^6; 4) $|b^3|$. **331.** 2) 0; 4) 6. **332.** 2) $2{,}7 > \sqrt{7}$; 4) $\sqrt{18{,}49} = 4{,}3$. **334.** 2) $12 < \sqrt{160} < 13$; 4) $2 < \sqrt{8{,}7} < 3$. **335.** 2) $\sqrt{5} - 2$; 4) $4 - \sqrt{15}$. **336.** 2) $-a - 3$; 4) $3b - a$. **338.** 1) $x \geqslant 2$; 2) $x \leqslant 2$. **339.** 1) 0,41; 2) 0,24. **340.** 2) 1,3; 4) 72. **341.** 2) 40; 4) 18. **342.** 2) 78; 4) 42. **343.** 2) 30; 4) 22; 6) $\frac{1}{2}$. **344.** 2) 80; 4) 25. **345.** 2) 392; 4) 108. **346.** 2) 7; 4) 30. **347.** 2) $x\sqrt{2}$; 4) $a^3\sqrt{3}$. **348.** 2) $5a\sqrt{3}$; 4) $5a\sqrt{2a}$. **349.** 2) $3\sqrt{2}$; 4) $1 - 2\sqrt{5}$; 6) $8\sqrt{3}$. **350.** 2) $\sqrt{27}$; 4) $\sqrt{3}$. **351.** 2) $\sqrt{2a^2}$; 4) $\sqrt{3x}$. **352.** 2) $2\sqrt{40} = 4\sqrt{10}$; 4) $2\sqrt{45} < 4\sqrt{20}$. **353.** 2) $4x\sqrt{x}$. **354.** 2) 1. **355.** 2) $8\sqrt{5}$; 4) $5\sqrt{2}$. **356.** 2) $0{,}6ab\sqrt{ab}$. **357.** 2) $(\sqrt{b} - 4)(\sqrt{b} + 4)$; 4) $\left(\sqrt{b} - \frac{3}{7}\right)\left(\sqrt{b} + \frac{3}{7}\right)$. **358.** 2) $\sqrt{b} - 4$; 4) $0{,}9 - \sqrt{b}$. **359.** 1) 34,2; 2) 88; 3) 64,8; 4) 75,3; 5) 39,5; 6) 14,5. **362.** 2) $1\frac{3}{7}$; 4) $2\frac{1}{3}$. **363.** 2) 0; 4) $-\frac{19}{45}$. **364.** 2) 4; 4) 12. **365.** 2) $7\frac{14}{15}$; 4) $3\frac{3}{4}$. **366.** 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$; 4) $\frac{3 - \sqrt{2}}{7}$; 6) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$; 8) $9 + 4\sqrt{5}$. **367.** 2) 0,36; 4) 2,52. **368.** В 6 раз. **369.** 2) $\frac{11x^2}{8}$; 4) $-\frac{20}{a}$. **370.** 2) а) −1; б) 1. **371.** 4) 1; 6) $-1\frac{1}{4}$. **373.** 2) $\sqrt{x} + 3\sqrt{y}$. **374.** 1) 1,19; 2) 0,61; 3) 6,43; 4) 9,63; 5) 0,78; 6) 1,31. **377.** 2) 0,1; 4) $3\frac{1}{3}$. **378.** 2) $\sqrt{0{,}3}$; 4) 5. **379.** 2) 540; 4) 195. **380.** 2) 28; 4) 20. **381.** 2) 3; 4) $\frac{2}{3}$; **382.** 2) 27; 4) 216; 6) 49. **383.** 2) 1,5; 4) $-4 + 0{,}1\sqrt{6}$; 6) $-2\sqrt{2} - 10\sqrt{3}$. **384.** 2) $x(x - \sqrt{3})$; 4) $\frac{1}{\sqrt{b} - 4\sqrt{a}}$; 6) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. **385.** 2) $x = 16$; 4) $x = 4$. **386.** 2) $x \geqslant 3$; 4) $x \geqslant 2{,}5$. **387.** 2) а) $7 - 2a$; б) 3; в) $2a - 7$. **388.** 39. **389.** 2) $\frac{2}{a + \sqrt{b}}$; 4) $-2\sqrt{b}$. **391.** 2) $-\frac{b}{a}$. **392.** 2) $\frac{\sqrt{11} + \sqrt{3}}{4}$; 4) $\frac{15 + 11\sqrt{3}}{6}$. **394.** 2) 1,46; 4) 3,7. **395.** 2) 0,174; 4) 0,105. **396.** 2) 8,4; 4) 12,7; 6) 51,2. **399.** 2) а) $2 - 5x$; б) x; в) $5x - 2$. **400.** $\sqrt{a + b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$. **403.** 2) $-x^2 + 9 = 0$; 4) $x^2 = 0$. **404.** 2) $x^2 - 4x - 9 = 0$; 4) $5x^2 + 1 = 0$. **405.** 1) −3; 3; 2) −3; 2; 3) −2; 1; 4) 0; 1; 5) 1; 2; 3; 6) −1; 3. **408.** 2) $x_{1,2} = \pm\frac{4}{7}$; 4) $x_{1,2} = \pm 1{,}5$; 6) $x_{1,2} = \pm\sqrt{13}$. **409.** 2) $x_{1,2} = \pm 11$; 4) $x = 0$; 6) действительных корней нет. **410.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = -2$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}6$; 6) $x = -3$. **411.** 2) $x_{1,2} \approx \pm 5{,}57$; 4) $x_{1,2} \approx \pm 25{,}98$; 6) $x_{1,2} \approx \pm 0{,}14$. **412.** 2) $x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$. **414.** 1) $b = 4$, $x = -2$; 2) $b = 6$, $x = 3$; 3) $b = 16$, $x = 4$; 4) $b = \frac{1}{9}$, $x = -\frac{1}{3}$. **415.** 1) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$; 2) $x_1 = -1$, $x_2 = -2$. **417.** 2) $x = 0$; 4) $x_{1,2} = \pm 3$; 6) $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$; 8) $x_{1,2} = \pm 20$. **418.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = -5$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = 0{,}04$; 6) корней нет. **419.** 2) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{4}$; 4) $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$; 6) $x_{1,2} = \pm 1\frac{1}{3}$. **420.** 2) $x_{1,2} = \pm 2$;

4) $x_{1,2}=\pm1\frac{1}{3}$. **421.** 2) $x_1=0$, $x_2=4$; 4) $x_1=0$, $x_2=-2{,}5$. **422.** 2) $x_1=0$, $x_2=2\frac{3}{19}$. **423.** 2) $x_{1,2}=\pm8$; 4) $x_{1,2}=\pm2$. **424.** 0 и 2. **425.** ±2. **426.** 50,5 м. **427.** 1) $x=-3$; 2) $x=0$. **428.** 2) $m=9$; 4) $m=64$; 6) $m=6$. **429.** 2) $x_1=2$, $x_2=-6$; 4) $x_1=8$, $x_2=2$; 6) $x_{1,2}=-4\pm\sqrt{23}$. **430.** 2) $x_1=\frac{3}{5}$, $x_2=-\frac{1}{5}$. **431.** 1) $x_1=1$, $x_2=4$; 2) $x_1=5$, $x_2=-2$. **432.** 1) $x_1=1$, $x_2=-2{,}5$; 2) $x_1=2$, $x_2=-\frac{3}{5}$. **433.** 2) 0,4; 4) 85. **434.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=3$, $x_2=0{,}5$; 6) $x_1=2$, $x_2=\frac{3}{4}$. **435.** 2) $x_1=4$, $x_2=-0{,}5$; 4) $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$; 6) $\frac{-6\pm2\sqrt{6}}{3}$; 8) $x_1=1$, $x_2=-\frac{4}{3}$. **436.** 2) $x=\frac{1}{4}$; 4) $x=-\frac{1}{6}$. **437.** 1), 2), 3), 4) действительных корней нет. **438.** 2) Два; 4) ни одного. **439.** 2) Действительных корней нет; 4) $x=2{,}5$; 6) $x_1=4$, $x_2=-1$. **440.** 2) $x_1=1$, $x_2=0{,}2$; 4) $x_1=7$, $x_2=-8$; 6) $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{7}}{7}$. **441.** 2) $x_1=7$, $x_2=-11$; 4) $x_1=0{,}6$, $x_2=-3$. **442.** 2) $a>1\frac{1}{8}$. **443.** 2) $q=1$. **444.** 2) $x_1=0{,}5$, $x_2=-1{,}5$; 4) $x_1=5$, $x_2=\frac{1}{5}$. **445.** 2) $x_1=-3{,}1$, $x_2=-1{,}7$; 4) $x_1=-57$, $x_2=111$. **446.** $x=-m\pm\sqrt{m^2-c}$. 2) $x_1=-4$, $x_2=-6$; 4) $x_1=49$, $x_2=1$. **447.** 1) $x_1\approx-3{,}13$, $x_2\approx-1{,}25$; 2) $x_1\approx4{,}51$, $x_2\approx8{,}57$; 3) $x_1\approx-22{,}08$, $x_2\approx3{,}08$; 4) $x_1\approx-2{,}04$, $x_2\approx25{,}04$. **450.** 2) $x_1=7$, $x_2=-1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-10$; 6) $x_1=2$, $x_2=-1$. **455.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-3x-18=0$. **456.** 2) $x_1=3$, $x_2=4$; 4) $x_1=-1$, $x_2=-7$; 6) $x_1=3$, $x_2=-5$. **457.** 2) $(x-1)(x+5)$; 4) $(x+7)(x-6)$; 6) $(2x+1)(4x+3)$; 8) $(x+2)(1-4x)$. **458.** 2) $x+6$; 4) $\frac{1}{x+7}$; 6) $\frac{x+3}{3x+1}$. **459.** 2) $x_{1,2}=\sqrt{5}\pm2$; 4) $x_{1,2}=2(\sqrt{7}\pm\sqrt{6})$. **460.** 2) $x(x+7)(x-3)$; 4) $x(x-11)\times$ $\times(x+2)$. **461.** 2) $\frac{x-9}{x+8}$; 4) $\frac{9-x}{x-5}$. **462.** 2) $-\frac{x}{(x+3)^2}$; 4) $\frac{x-1}{x(x+10)}$. **463.** x^2- $-px-q=0$. **464.** $q=8$, $x_1=-2$, $x_2=-4$. **465.** $p=-4$, $x_1=1$, $x_2=3$ или $p=4$, $x_1=-1$, $x_2=-3$. **466.** 1) $-\frac{8}{15}$; 2) $17\frac{1}{9}$; 3) $-3\frac{19}{45}$; 4) $58\frac{26}{27}$. **467.** 1) $x_1\approx-2{,}414$, $x_2\approx0{,}414$; 2) $x_1\approx-0{,}732$, $x_2\approx2{,}732$; 3) $x_1=-6{,}3$, $x_2=4{,}5$; 4) $x_1=-18$, $x_2=57$; 5) $x_1\approx1{,}42$; $x_2\approx10{,}58$. **468.** 2) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm2$; 4) $x_{1,2}=\pm1$, $x_{3,4}=\pm7$. **469.** 2) $x_{1,2}=\pm1$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$. **470.** 2) $x_1=7$, $x_2=3\frac{1}{3}$; 4) $x_1=40$, $x_2=-20$; 6) $x_1=6$, $x_2=-\frac{2}{3}$. **471.** 2) $x_{1,2}=\pm10$; 4) корней нет; 6) $x=-3$. **472.** 2) Нет. **473.** 2) $x=0$. **474.** 1) $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=3$, $x_4=-1$; 2) $x_1=-4$, $x_2=-6$. **475.** 1) $x_{1,2}\approx\pm1{,}24$; 2) $x_{1,2}\approx\pm0{,}924$; 3) $x_{1,2}\approx\pm1{,}28$; 4) $x_{1,2}\approx\pm1{,}8$. **476.** 2) 14 и 15. **477.** 2) 19 и 21. **478.** 10 см, 40 см. **479.** 140 м, 175 м. **480.** 100 км/ч, 80 км/ч. **481.** 10 км/ч. **482.** 10 дней, 15 дней. **483.** Сторона квадрата равна 15 см. **484.** 9 см, 40 см. **485.** 18 км/ч, 15 км/ч. **486.** 30 дней, 20 дней. **487.** 18 км/ч. **488.** 60 км/ч. **489.** 10 дней, 15 дней. **490.** 8%. **491.** 4 кг, 6 кг. **492.** 2) (4; 1); 4) (0,5; 3). **493.** 2) (7; −5), (−4; 6);

4) (–1; –1), (7; 23). **494.** 2) (4; –3), (17; 10); 4) (4; 1), (–1; –4). **495.** 2) (1; 7), (7; 1); 4) (–2; –5), (–5; –2). **496.** 2) (4; –1); 4) (3; 1). **497.** 2) (2; 5), (5; 2), (–2; –5), (–5; –2); 4) (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). **498.** 5 и 13. **499.** 4 и 36. **500.** 2) (7; –1), (–1; 7). **501.** 2) (4; 1), (–1; –4); 4) (2; 4), (4; 2); 6) (2; 2). **502.** 2) (1; 4), (–4; –1); 4) (1; 5), (5; 1), (–1; –5), (–5; –1). **503.** 2) (9; 4). **504.** 300 м, 200 м. **505.** 64. **506.** 1) (2; 3), (3; 2); 2) (3; 5), (5; 3). **507.** 20 км/ч, 12 км/ч. **509.** 2) $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}i$; 4) $-\frac{2}{7}-3i$. **510.** $-0{,}5+\sqrt{4}i=-\frac{1}{2}+2i$, $3-2i=\sqrt[3]{27}-\sqrt{4}i=\sqrt{9}-\sqrt[3]{8}i$, $\sqrt{9}-4i=\sqrt[3]{27}-\sqrt{16}i$. **511.** 2) $x=7$, $y=4$; 4) $x=1$, $y=6$. **512.** 2) $5-4i$; 4) 0; 6) $-i$. **513.** 2) $1-6i$; 4) $6i$; 6) 4. **514.** 2) $15+10i$; 4) $-11+13i$. **515.** 2) $2-3i$; 4) $-7+5i$; 6) $\frac{1}{3}-\frac{2}{5}i$. **516.** 2) $\frac{2}{5}-\frac{11}{5}i$; 4) $-\frac{1}{13}+\frac{8}{13}i$. **517.** 2) $-2-2i$; 4) $2+3i$; 6) $12+4i$. **518.** 2) $0{,}8+4{,}4i$; 4) $0{,}7-0{,}4i$; 6) $\frac{12}{13}$. **519.** 1) $1-i$; 2) $-1{,}6+1{,}8i$; 3) $2{,}5-1{,}5i$; 4) $-2-i$. **520.** 1) $(a+2bi)(a-2bi)$; 2) $(3a+5bi)(3a-5bi)$; 3) $(2\sqrt{2}a+4bi)(2\sqrt{2}a-4bi)$; 4) $(9a+\sqrt{5}bi)(9a-\sqrt{5}bi)$. **521.** 1) $5+12i$; 2) $2-11i$; 3) i; 4) 1; 5) $24i$; 6) -14. **522.** 2) $z_{1,2}=\pm i\sqrt{3}$; 4) $z_{1,2}=\pm\frac{5\sqrt{5}}{3}i$. **523.** 2) $z_{1,2}=2\pm i$; 4) $z_{1,2}=-2\pm 3i$; 6) $z_{1,2}=4\pm 5i$. **524.** 2) $z_{1,2}=-0{,}5\pm i$; 4) $z_{1,2}=1\pm\frac{1}{4}i$; 6) $z_{1,2}=3\pm\sqrt{2}i$. **525.** 2) $z^2-4z+13=0$; 4) $z^2+14z+65=0$. **526.** 2) $z^2+z+\frac{13}{36}=0$; 4) $z^2-2\sqrt{3}z+5=0$. **527.** 2) $(z-1-3i)(z-1+3i)$; 4) $(5z+5-i)(5z+5+i)$. **528.** 2) $z_{1,2}=\pm 3$, $z_{3,4}=\pm i$; 4) $z_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $z_{3,4}=\pm\sqrt{5}i$. **529.** 2) $x_{1,2}=\pm 5\sqrt{2}$; 4) $x_1=0$, $x_2=7{,}5$. **530.** 2) $x_1=13$, $x_2=-4$; 4) $x_1=3{,}6$, $x_2=-7$. **531.** 2) $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{6}$; 4) $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$. **532.** 2) Два; 4) один. **533.** 2) $(x-8)(x-2)$; 4) $(x-2)(2x+1)$. **534.** 2) $x(x+2)$; 4) $\frac{5x+1}{x-3}$. **535.** 2) $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$; 4) $x_{1,2}=\pm\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. **536.** 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$; 4) $y=1$. **537.** 1 и 2. **538.** $\frac{5}{3}$ и $\frac{2}{3}$ или $-\frac{2}{3}$ и $-\frac{5}{3}$. **539.** 12 м, 7 м. **540.** 15 см, 45 см. **541.** 20 км/ч. **542.** 15 км/ч. **543.** 3 дня, 5 дней. **544.** 2) $z_{1,2}=3\pm i$; 4) $z_{1,2}=-2\pm 0{,}5i$. **545.** 2) (1; 3), $\left(9;\ \frac{1}{3}\right)$; 4) (–3; –4), (–4; –3); 6) (5; 4); 8) (2; –1), (1; –2). **546.** 2) $x_1=0$, $x_2=-2$. **547.** 2) $x=0{,}5$; 4) $x_1=7$, $x_2=-13$. **548.** 2) $x_1=0$, $x_2=-5$; 4) $x_{1,2}=\pm 4$. **549.** 2) $x_1=9$, $x_2=-12$; 4) $x_1=3$, $x_2=-6$. **550.** 2) Ни одного; 4) два. **551.** 2) $x=-4$; 4) $x=3$. **552.** 2) $x-4$. **553.** 2) $x_1=3$, $x_2=1{,}4$. **554.** За 36 дней. **555.** 1 ч 40 мин и 1 ч 20 мин или 2 ч и 1 ч 40 мин. **556.** 12 ч, 6 ч. **557.** 50 км/ч. **558.** 44 км/ч. **559.** 21 ряд или 5 рядов. **560.** 10 р. и 15 р. **561.** 2) $z_{1,2}=1\pm\sqrt{2}i$; 4) $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{2}i}{3}$. **562.** 2) (2; 3); (–2; –3), (3; 2), (–3; –2); 4) (2; 4), (4; 2). **563.** 6 и 8. **564.** 60 км/ч, 40 км/ч. **565.** 2) $x^2-5x+6=0$; 4) $x^2-4x-5=0$. **566.** $x_2=0{,}6$.

567. 2) 91; 4) 7399. **568.** $a = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{19}$. **569.** $q = 1$. **570.** $p = 2$ или $p = -2$. **571.** 2) $x_1 = 9$, $x_2 = -4$. **572.** 8 школьников. **573.** 22 шахматиста. **574.** 12 команд. **575.** 6 спортсменов. **576.** 7 человек. **577.** 2) 10; 4) 2,75. **579.** 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$; 4) нет таких действительных значений x, при которых значение данной функции равно -5. **580.** 2) $x_1 = 1\frac{3}{4}$, $x_2 = -1$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$. **581.** 2) -1; 0; 4) $-0{,}2$; 1. **582.** 2) Нулей нет; 4) $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{1}{2}$; 6) нулей нет; 8) $x = 1$. **583.** 2) $p = 3$, $q = -4$; 4) $p = -2$, $q = -15$. **584.** $x_{1,2} = \pm 2$. **585.** 1) (0; 1), $(-0{,}5; 0)$; 2) $\left(\frac{17}{3}; \frac{16}{9}\right)$, (3; 0); 3) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; \frac{3}{2}\right)$, $(\sqrt{2}; 0)$; 4) $\left(\frac{1}{3}; \frac{\sqrt{3}}{9} + 1\right)$, $(-\sqrt{3}; 0)$. **587.** B и C. **590.** 2) $(\sqrt{5}; 5)$, $(-\sqrt{5}; 5)$; 4) (0; 0), (2; 4); 6) (1; 1). **591.** 2) Да. **592.** 2) Да; 4) нет. **594.** 1) $x < -3$, $x > 3$; 2) $-5 \leqslant x \leqslant 5$; 3) $x \leqslant -4$, $x \geqslant 4$; 4) $-6 < x < 6$. **598.** 2) $a = \frac{1}{4}$; 4) $a = -\frac{1}{9}$. **599.** 2) $-3 < x < 3$; 4) $-4 \leqslant x \leqslant 4$. **600.** 2) $-3 \leqslant x \leqslant 3$; 4) $-5 < x < 5$. **601.** 2) $(-3; -4{,}5)$, $(2; -2)$. **602.** $a = 2$. **603.** $k = -13$; да, точка $(0{,}6; -1{,}8)$. **604.** 2) Да; 4) нет. **605.** 1) Возрастающая; 2) убывающая; 3) возрастающая; 4) не является ни возрастающей, ни убывающей. **606.** 3 м/с^2. **609.** 2) $(3; -16)$; 4) (3; 20). **610.** 2) $(0; -5)$; 4) $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{16}\right)$. **611.** 2) $x = -2$; 4) $x = 2$; 6) $x = \frac{3}{4}$. **612.** 2) Нет; 4) нет. **613.** 2) (1; 0), (0,5; 0), $(0; -1)$; 4) (0; 0), $\left(\frac{4}{3}; 0\right)$. **614.** $y = x^2 - 2x + 3$. **616.** 2) $k = -10$. **618.** 1) $y = 2(x-3)^2$; 2) $y = 2x^2 + 4$; 3) $y = 2(x+2)^2 - 1$; 4) $y = 2(x - 1{,}5)^2 + 3{,}5$. **620.** $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$. **621.** 2) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{11}{4}\right)$; 4) $\left(\frac{5}{2}; \frac{21}{4}\right)$. **622.** 2) (1; 0), $(-5; 0)$, (0; 10); 4) (0; 14). **626.** 7,5 + 7,5. **627.** 5 и 5. **628.** Сторона, параллельная стене, равна 6 м; другие стороны по 3 м. **629.** Нет. **630.** 2) При $x = 1$ наименьшее значение $y = -5$; 4) при $x = 1$ наименьшее значение $y = -2$. **631.** 1) $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$; 2) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$. **633.** 1) Через 5 с наибольшая высота равна 130 м; 2) $(5 + \sqrt{26})$ с. **634.** 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$; 4) ни при каких действительных x. **635.** 2) (1; 1), (2; 4); 4) $(-5; 18)$. **636.** 2) $x < -6$, $x > 6$. **637.** 2) (5; 0), $(-2; 0)$, (0; 10); 4) (1; 0), $\left(-\frac{11}{7}; 0\right)$, $(0; -11)$. **638.** 2) $(-1; 4)$; 4) $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$; 6) $\left(-\frac{1}{2}; -6\frac{1}{4}\right)$. **640.** 2) Наибольшее значение равно 4; 4) наименьшее значение равно $3\frac{2}{3}$. **641.** 150 м и 150 м. **642.** 200 м и 400 м. **643.** 2) $p = 1$, $q = 0$. **644.** 2) $p = -4$, $q = 3$. **645.** 1) $x_1 = 1$, $x_2 = -5$; 2) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. **646.** 1) $a = 1$, $b = -2$, $c = 0$; 2) $a = 1$, $b = -2$, $c = 4$; 3) $a = -2$, $b = 8$, $c = -6$. **647.** $k_1 = 6$, $k_2 = 2$. **650.** 2) $3x^2 - x - 1 > 0$; 4) $2x^2 + x - 5 < 0$. **652.** 2) $3 < x < 11$; 4) $x < -7$, $x > -1$. **653.** 2) $x < -3$, $x > 3$; 4) $x < 0$, $x > 2$. **654.** 2) $-2 < x < 1$; 4) $x < -3$, $x > 1$; 6) $x < -1$, $x > \frac{1}{3}$. **655.** 2) $x = \frac{1}{6}$; 4) $x < -4$, $x > 2$. **658.** 7, 8, 9.

659. Положительные значения на промежутках $x < -3$, $x > 2$; отрицательные — на интервале $-3 < x < 2$. **660.** 2) $x \leqslant -1$, $x \geqslant 4$; 4) $-1 < x < 4$. **661.** 2) $x < -\frac{1}{3}$, $x > 2$; 4) $x \leqslant -0{,}25$, $x \geqslant 1$. **662.** 2) $x = 7$; 4) решений нет; 6) x — любое действительное число. **663.** 2) Решений нет; 4) решений нет; 6) x — любое действительное число. **664.** 2) $x < -\sqrt{7}$, $x > \sqrt{7}$; 4) $x < -2$, $x > 0$; 6) $x < -5$, $x > 3$; 8) $-2 < x < -1$. **667.** 2) $x < -\frac{5}{3}$, $x > \frac{5}{3}$; 4) $-1 < x < 4$; 6) x — любое действительное число; 8) $x = -3$. **668.** 2) x — любое действительное число; 4) $x \neq \frac{1}{4}$; 6) $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0$. **669.** 2) Решений нет; 4) $-0{,}5 < x < 3$; 6) x — любое действительное число. **670.** 2) $x = 1$; 4) x — любое действительное число. **672.** $-6 < r < 2$. **673.** $r < -3$, $r \geqslant 1$. **675.** 2) $-5 < x < 8$; 4) $x < -5$, $x > 3\frac{1}{2}$. **676.** 2) $x < 0$, $x > 9$; 4) $-3 < x < 0$; 6) $x < -1$, $x > 3$. **677.** 2) $-\frac{1}{2} < x < 0$, $x > \frac{1}{2}$; 4) $-2 < x < 2$, $x > 5$. **678.** 2) $-7 < x < 7$; 4) $-4 < x < 4$, $x > 4$; 6) $x = -2$, $2 \leqslant x \leqslant 5$. **679.** 2) $-3 < x < 4$; 4) $-3{,}5 \leqslant x < 7$; 6) $-2 \leqslant x < -1$, $x \geqslant 3$. **680.** 2) $x < 0{,}5$, $x > 1$; 4) $x < -\frac{2}{3}$, $0 < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{2}{3}$; 6) $-4 < x < -2$, $x > 3$. **681.** 2) $-3 \leqslant x \leqslant -1$; $4 \leqslant x \leqslant 5$; 4) $x < -2$, $2 < x < 6$; 6) $x < -3$, $-1 \leqslant x < 2$, $x \geqslant 4$. **682.** 2) $-\sqrt{15} < x < -3$, $0 < x < \sqrt{15}$; 3) $-8 < x < -1$; 4) $x < -5$, $x > 2$; 5) $-1 < x \leqslant -\frac{2}{5}$; 6) $x < -4$, $-4 < x < \frac{3}{2}$, $x > 4$. **685.** $-\frac{1}{2} < b \leqslant 0$. **686.** $2\sqrt{2} \leqslant b < \frac{11}{3}$. **687.** 2) $x < 3$, $x > 4$; 4) $x < 3$, $x > 4$; 6) $x < -6$, $x > 6$; 8) $-\frac{3}{4} \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}$. **688.** 2) $-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$; 4) $x \leqslant 0$, $x \geqslant \frac{1}{3}$; 6) $\frac{1}{2} < x < 4$; 8) $-2 < x < \frac{1}{2}$. **689.** 2) $x < \frac{4}{5}$, $x > 1$; 4) $x \neq -5$; 6) $x \neq -\frac{3}{2}$. **690.** 2) Решений нет; 4) решений нет; 6) решений нет. **691.** 2) $x < -4$, $-1 < x < 1$; 4) $x < -\frac{1}{2}$, $4 < x \leqslant 7$; 6) $x < -\frac{1}{2}$, $1 < x < 2$. **692.** 2) $-1 < x < 5$; 4) $-5 \leqslant x \leqslant 2$; 6) $x \leqslant -\frac{3}{2}$, $x \geqslant \frac{1}{3}$. **693.** 2) x — любое действительное число; 4) решений нет; 6) $\frac{1}{2} < x < 1$; 8) x — любое действительное число. **694.** 2) $x \leqslant \frac{1}{2}$, $x \geqslant 3$; 4) $x = \frac{2}{3}$; 6) решений нет. **695.** 2) $x < -\sqrt{3}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} < x < \sqrt{3}$; 4) $x < -4$, $-1 < x < 1$, $x > 1$. **696.** 2) $-1 < x < -\frac{1}{5}$, $\frac{3}{4} < x < 2$; 4) $-\frac{1}{3} < x \leqslant -\frac{1}{5}$, $1 < x \leqslant 2$. **697.** Не меньше 12 км/ч. **699.** 1) $x \leqslant -3$, $-2 < x < 1$, $x \geqslant 3$; 2) $-3 < x < -2$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$; 3) $-\sqrt{2} < x < -1$, $1 < x < \sqrt{2}$; 4) $x < -2$, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$, $x > 2$. **700.** 0; 1; 2; 3 или -1; 0; 1; 2. **701.** 2) $\frac{22}{35}$; 4) $-\frac{5}{6}$; 6) 3,485; 8) 4,5. **702.** 2) $x_1 = 3$, $x_2 = -4$; 4) $x_1 = 0$, $x_2 = -1\frac{2}{3}$; 6) $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$;

8) $x=-\frac{1}{3}$. **706.** 2) $y \geqslant -2$; 4) $x>-4$; 6) $x \leqslant 11\frac{1}{3}$. **707.** 2) -5; -4; -3; -2; -1; 0; 4) 4. **708.** 2) (2; 1); 4) $(-13{,}5;\ -27{,}5)$; 6) (6; 6); 8) (1; 2). **709.** 2) $\frac{2}{9}<x \leqslant 10$; 4) $x>7{,}2$. **710.** 2) -15; -14; ...; -1; 0. **711.** 2) $x_1=8{,}1$, $x_2=-2{,}1$; 4) $x_1=4$, $x_2=-3$; 6) $x_1=0$, $x_2=\frac{6}{7}$. **712.** 2) $x \leqslant -3{,}4$, $x \geqslant 7{,}4$; 4) $x \leqslant -2\frac{1}{3}$, $x \geqslant 1$; 6) $x \leqslant -\frac{1}{15}$, $x \geqslant \frac{29}{15}$. **713.** 2) 0,004; 4) $\frac{1}{1375}$. **715.** $\approx$0,1%. **716.** 2) $1\frac{1}{3}$; 4) $\frac{52}{99}$; 6) $2\frac{17}{45}$. **717.** 2) $3{,}1<\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{7{,}3}>2{,}7$. **718.** 2) $a=-11$; 4) $a=\frac{4}{7}$. **719.** 2) -44. **720.** 2) $(\sqrt{15}-b)(\sqrt{15}+b)$; 4) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{41}}-x\right)\left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{41}}+x\right)$. **721.** 2) $\frac{1}{5}$; 4) 21; 6) 200. **722.** 25 см^3. **723.** В 1,6 раза. **724.** 2) $-3xy^2\sqrt{5xy}$. **725.** 2) $-4{,}2\sqrt{2}$. **726.** 2) 8. **727.** 2) $15\sqrt{2}-\sqrt{5}$; 4) $2x\sqrt{x}$. **728.** 2) $3-a^2$; 4) $-ab$. **729.** 2) $x=5\frac{3}{4}$; 4) $x=-1$; 6) $x=3\frac{1}{4}$. **730.** 2) $x_{1,2}=\pm\sqrt{11}$; 4) $x_1=0$, $x_2=-5$; 6) $x_1=0$, $x_2=12$. **731.** 2) $y_1=0$, $y_2=9$; 4) $x_1=0$, $x_2=9$; 6) $x_{1,2}=\pm1{,}5$. **732.** $\frac{2}{15}$ см, $2\frac{2}{15}$ см. **733.** 8 см; 32 см. **734.** 2) $x_1=-4$, $x_2=0{,}5$; 4) $x_1=0{,}5$, $x_2=-2$; 6) $x_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{13}}{2}$. **735.** 2) $x_1=10$, $x_2=-2$; 4) $x_{1,2}=\pm2\sqrt{2}$; 6) $x_{1,2}=6\pm\sqrt{29}$. **736.** 2) $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=\frac{2}{15}$; 4) $x_{1,2}=\pm5$. **737.** 6) $x_1=8$, $x_2=-3$; 8) $x_1=7$, $x_2=-11$. **738.** $p=5$, $q=-150$. **739.** 2) $x^2-bx+c=0$. **740.** 2) $x_{1,2}=\pm3$, $x_{3,4}=\pm\frac{1}{2}$; 4) $x_{1,2}=\pm3$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$. **741.** 2) $x_{1,2}=\pm2$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{3}$; 4) $x_{1,2}=\pm i\sqrt{3}$, $x_{3,4}=\pm i\sqrt{2}$. **742.** 2) $x=-\frac{1}{3}$; 4) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=-4$; 6) $x=\frac{1}{2}$. **743.** 2) $x=-2$; 4) $x_{1,2}=1\pm i$. **744.** 2) $(x-9)(x+4)$; 4) $(x+1)(2x-5)$; 6) $2(x+3)(1-2x)$; 8) $\frac{1}{5}(x-5)(x+10)$. **745.** 2) $\frac{1}{a-9}$; 4) $\frac{a-3}{2(a-2)}$; 6) $\frac{3-a}{a-2}$. **746.** 1) $(a-b)(a+b)\times$ $\times(a^2+b^2-1)$; 2) $(m+n)(mn-1)$; 3) $m^2(m-1)(m^2+1)$; 4) $x(x-1)(x^2+1)$; 5) $(4x-y)(4x+3y)$; 6) $(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)$; 7) $(b-2)(b+2)(b-3)\times$ $\times(b+3)$; 8) $3(x+m)(x-3m)$. **747.** 340 кг, 40 кг, 20 кг. **748.** 96 км. **749.** 16 пресс-форм. **750.** 18 т с га, 20 т с га. **751.** $\frac{15}{4}$. **752.** 30 дней, 20 дней. **753.** 15 ч, 12 ч. **754.** 27 км/ч. **755.** 2) (1; 0); 4) $\left(\frac{4}{3};\ \frac{5}{3}\right)$. **756.** 2) (2; 0), (0; -5). **757.** 2) $x=0$, $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{4}{3}$. **758.** 2) $(-4;\ -4)$, $(-2;\ 0)$, $(-6;\ 0)$, (0; 12); 4) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{4}\right)$, (0; 0), (1; 0); 6) $(-3;\ -1)$, $(-2;\ 0)$, $(-4;\ 0)$, (0; 8);

8) $\left(-\frac{5}{4};\ -\frac{1}{8}\right)$, $(-1;\ 0)$, $(-1{,}5;\ 0)$, $(0;\ 3)$. **763.** 2) $-15 < x < -4$; 4) $x \leqslant 12$; $x \geqslant 13$. **764.** 2) $0 < x < \sqrt{5}$; 4) $x < -\sqrt{3}$, $x > \sqrt{3}$. **765.** 2) $-9 < x < 6$; 4) $-2 < x < 0{,}1$; 6) $x \leqslant \frac{1}{8}$, $x \geqslant 2$. 766. 2) $x = -12$; 4) x — любое действительное число; 6) решений нет. **767.** 2) x — любое действительное число; 4) x — любое действительное число; 6) x — любое действительное число. **768.** 2) $-0{,}7 < x < \frac{1}{2}$; 4) $-2 \leqslant x \leqslant 1$. **769.** 2) $x \leqslant -2$, $x = 1$; 4) $x \leqslant -\frac{1}{3}$, $0 \leqslant x \leqslant 2$. **770.** 2) $-0{,}5 \leqslant x < 2$; 4) $-3 < x < 0$, $x > 1$. **771.** От леса до дома. **772.** На первом руднике. **773.** Десятиклассник. **777.** 2) Меньше 400 км. **778.** Не более 400 Дж. **781.** 2) Решений нет; 4) $1 < x < 4$; 6) $x > 4\frac{1}{12}$. **782.** Больше 2 см, но меньше 3 см. **783.** Не меньше 4 м/ч, но меньше 5 м/ч. **784.** Между 18 и 19 часами. **785.** 2) $x < \frac{1}{3}$, $x > 3$. **786.** 2) $-4{,}6ab^2\sqrt{ab}$. **787.** 2) 42; 4) 3. **788.** 2) $2\sqrt{a-1}$; 4) $-\sqrt{3}$. **789.** 2) $\frac{b-c}{4(b+c)}$; 4) $\frac{a}{b}$. **791.** $k > \frac{9}{16}$. **792.** $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. **793.** 2) $x_1 = 1{,}2$, $x_2 = -2$; 4) $x = 3$; 6) $x = 2$. **794.** 2) $y + 4$. **795.** 6 км. **796.** 15 км/ч. **797.** 120 км. **798.** 3 км/ч, 20 км/ч. **799.** 12 р., 2 р. **800.** 12 вагонов, 190 т. **801.** 5 листов. **802.** 30 г, 24 г. **803.** 16 или 48 обезьян. **804.** 2) $2\frac{5}{9} \leqslant x \leqslant 7$; 4) $x < -1\frac{2}{65}$, $x > -1$. **805.** Высота больше 3,1 см, средняя линия больше 6,2 см. **806.** Больше 8 с. **807.** Больше 5 см. **808.** 2) $x < -7$, $-1 < x < 2$; 4) $-1 \leqslant x < -\frac{1}{3}$, $x > \frac{1}{3}$. **809.** $p = 5$, $q = -14$. **810.** 2) $p = 14$, $q = 49$. **811.** $y = -2x^2 + 11x - 5$. **812.** $y = \frac{h}{r^2}x^2$. **813.** 2) $a = -1$, $b = -1$, $c = 2$. **815.** Указания. 1) Обозначая $\frac{a}{b} = A^3$, $\frac{b}{c} = B^3$, $\frac{c}{a} = C^3$ и учитывая равенство $ABC = 1$, записать данное неравенство в виде $A^3 + B^3 + C^3 \geqslant 3ABC$, которое преобразовать к виду $(A + B + C) \times (A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC) \geqslant 0$. Неравенство $A^2 + B^2 + C^2 \geqslant AB + AC + BC$ получается сложением неравенств $A^2 + B^2 \geqslant 2AB$, $A^2 + C^2 \geqslant 2AC$, $B^2 + C^2 \geqslant 2BC$; 2) сложить неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического: $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geqslant 2c$, $\frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geqslant 2a$, $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} \geqslant 2b$; 3) вычесть из левой части неравенства правую и числитель полученной дроби записать в виде $(a+b)(a-b)^2 + (b+c)(b-c)^2 + (a+c)(a-c)^2$; 4) см. указание к **815(3)**. **817.** 1) $x_{1,2} = \pm 2$; 2) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3$; 3) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$; 4) $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; 5) $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$; 6) $x_{1,2} = \pm 4$, $x_{3,4} = \pm 6$. **819.** $r_{1,2} = \pm 1$. **820.** $x^2 - 343x + 81 = 0$. **821.** 1) $\frac{7}{8}$; 2) $-5\frac{1}{16}$; 3) 339,5; 4) $378\frac{1}{16}$. **822.** $r_1 = 2$, $r_2 = -8$. **824.** -3. **825.** -8. **826.** $a = -3$, $b = 6$, $c = 0$. **827.** Через 0,6 с. **828.** 1) $(a - \sqrt{3})\times$

$\times (a+\sqrt{3})(a^2+1)$; 2) $(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)$. **829.** 1) $\frac{a+3b}{a+b}$; 2) $\frac{a+3b}{2a+3b}$; 3) $\frac{4a^2-6ab+9b^2}{a-b}$; 4) $\frac{4a^2+6ab+9b^2}{a+b}$. **830.** 21 м/с, 147 м. **831.** 56 с. **832.** 14 мин, 18 мин 40 с. **833.** 6 с. **834.** 1 ч. **835.** 5 ч, 7,5 ч. **836.** 1) 84,7; 2) 13,4; 3) 43,8; 4) 80,2. **837.** 1) 959,72; 2) 22,02; 3) 6,13; 4) 4,4. **838.** 1) 43,37; 2) 71,79. **839.** 1) 4,9; 2) 2,9; 3) 59,9; 4) 63,3. **840.** 1) 2,1; 2) 5,1; 3) 1,9; 4) 3,5. **841.** 1) −32,5; 2) 165,7; 3) 90,4; 4) 29,8. **842.** 1) 1,1; 2) 0,8. **843.** 1) $x_1=-61$, $x_2=123$; 2) $x_1\approx-143$, $x_2\approx-38$; 3) $x_1=6{,}3$, $x_2=3{,}4$; 4) $x_1\approx-8{,}7$; $x_2\approx7{,}2$. **844.** 1) $x_{1,2}=\pm2{,}3$, $x_{3,4}=\pm3{,}1$; 2) $x_{1,2}=\pm1{,}5$, $x_{3,4}=\pm2{,}4$. **845.** Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$. **847.** $n=2$. **848.** $100=80+20$, $100=40+60$. **849.** Указание. Возвести обе части равенства в квадрат. **850.** $x_1=2$, $x_2=-\frac{2}{5}$. **851.** $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. **852.** 40 яиц и 60 яиц. **853.** 60 или 40 пистолей. **855.** 18. **858.** 9. **859.** 24. **865.** 10 989. **874.** 3. **877.** $x_1=y_1=0$, $x_2=y_2=2$. **879.** 3 926 341. **885.** 1) $\frac{8}{1-x^8}$; 2) 0; 3) 2; 4) $\frac{1}{n}$. **886.** 1) $x_1=2$, $x_2=-1-\sqrt{5}$; 2) $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$; 3) $x_1=-4$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=6$; 4) x — любое число такое, что $2\leqslant|x|\leqslant3$; 5) $x_1=-4$, $x_2=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3=\frac{\sqrt{5}-3}{2}$, $x_4=1$; 6) $x_1=-6$, $x_2=-3-\sqrt{8}$, $x_3=-3+\sqrt{8}$, $x_4=0$; 7) $x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2=1$, $x_3=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$; 8) $x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **887.** 1) (2; 3), (−2; −3); 2) (3; 4), (4; 3); 3) (2; 3), (3; 2); 4) (−4; −3), (−4; 2), (3; −3), (3; 2); 5) (1; 2), (2; 1); 6) (0; 0), (6; 3), (3; 6), (−2; 1), (1; −2); 7) (−3; −5), (3; 5), $\left(-\frac{5}{3};\ -\frac{13}{3}\right)$, $\left(\frac{5}{3};\ \frac{13}{3}\right)$; 8) (−4; −5), (4; 5), $(-3\sqrt{3};\ -\sqrt{3})$, $(3\sqrt{3};\ \sqrt{3})$. **888.** 1) (1; 2), (2; 1); 2) (4; 3), (3; 4); 3) (0; 2), (0; −2), (1; −3), (−1; 3); 4) (2; −1), (−1; 2); 5) $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$; 6) (0; 0), $(\sqrt{7};\sqrt{7})$, $(-\sqrt{7};-\sqrt{7})$, $(\sqrt{19};-\sqrt{19})$, $(-\sqrt{19};\sqrt{19})$, (2; 3), (−2; −3); (3; 2), (−3; −2); 7) (2; 1), (−1; −2); 8) (−4; −2), (4; 2). **889.** 1) $r_1=6$, $r_2=2$; 2) $r=0$. **894.** $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. **895.** $-0{,}5<r<0$. **896.** $r\geqslant1$. **898.** $a=-2$. **900.** $r<0$, $4\leqslant r\leqslant4{,}5$. **902.** $r<-\frac{2}{3}$, $r\geqslant3+2\sqrt{2}$. **904.** 1) $c>0$; 2) $c<0$. **908.** $-\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}<a<0$, $a>1$. **909.** $a<-4$, $-\frac{5}{4}<a<0$. **910.** 1) $(x+2)(x-3)(x-5)$; 2) $(x+2)(x+1)(x-1)(x-3)$; 3) $(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$; 4) $(x+2)(x+4)\times$ $\times(x^2+5x+8)$. **911.** $(x^3-x^2+1)(x^2+x+1)$. **912.** 1) $(x-1)(x^2+1)$; 2) $\frac{x+2}{x+1}$; 3) $x+1$; 4) $\frac{x^2+1}{x-2}$; 5) $\frac{x+3}{2x+1}$; 6) $\frac{x+2}{x-2}$. **914.** 1) $x<-\frac{\sqrt{7}}{2}$, $-1<x<\frac{\sqrt{7}}{2}$, $x>\frac{4}{3}$; 2) $-\frac{1}{\sqrt{3}}<x<\frac{4}{7}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}<x<1$; 4) $x<-3$, $1<x<3$; 6) $0<x<3$; 8) $x\leqslant\frac{3}{2}$.

Ответы к заданиям «Проверь себя!»

Глава I. **2.** 1) $x<2{,}4$; 2) $x\geqslant -15$; 3) $x<5$. **3.** 1) $4\frac{1}{3}<x<6\frac{1}{4}$; 2) $x\geqslant 3$; 3) $x<-5$.

Глава II. **1.** 0,(4). **2.** $4{,}4301\cdot 10^1$; $4{,}83\cdot 10^{-1}$; $-2{,}5\cdot 10^{-1}$. **3.** 1) $\approx 2664{,}89$; 2) $\approx 2{,}50$; 3) $\approx 3{,}00$.

Глава III. **1.** $7>\sqrt{48}$; $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$. **2.** 63; 6; 5; $\frac{3}{2}$; 17; 27. **3.** $-2\sqrt{2}$; $7-2\sqrt{10}$; 1. **4.** $2a\sqrt{2a}$. **5.** $x-\sqrt{3}$; $\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$. **6.** $\frac{5\sqrt{7}}{7}$; $2-\sqrt{3}$.

Глава IV. **1.** 1) $x=0$; 2) $x_1=-1$, $x_2=2$; 3) $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}$; 4) $x_1=0$, $x_2=1\frac{2}{3}$; 5) $x_{1,2}=\frac{1}{2}$; 6) $x_1=17$, $x_2=-1$; 7) $x_1=-2$, $x_2=\frac{1}{3}$; 8) нет корней. **2.** 1) $(x-2)(x+3)$; 2) $(x+1)(2x-3)$. **3.** 9 км/ч; 12 км/ч. **4.** (8,5; 0,5).

Глава V. **1.** Рис. 69. **2.** $x_1=0$, $x_2=2$. **3.** $y>0$ при $-1<x<1$; $y<0$ при $x<-1$; $x>1$. **4.** Функция возрастает при $x>0$; функция убывает при $x<0$. **5.** (3; 0); рис. 70.

Глава VI. **1.** 1) $-1<x<4$; 2) x — любое действительное число; 3) нет решений; 4) $x=-10$. **2.** $x\geqslant 1$, $-2\leqslant x\leqslant 0$.

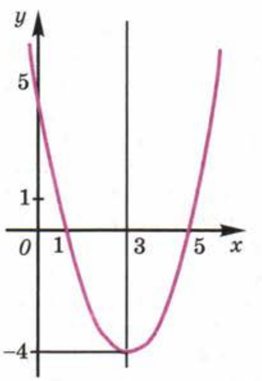


Рис. ***69***

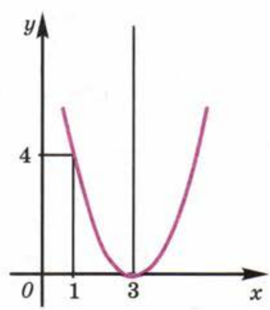


Рис. ***70***

Указания к решению задач для внеклассной работы

856. Воспользоваться равенством $111=3\cdot 37$, откуда $333=9\cdot 37, 555=15\cdot 37$.
857. Число 11^{11} оканчивается цифрой 1. Число 12^{12} оканчивается цифрой 6, так как число 12^4 оканчивается цифрой 6 (проверить умножением), $12^{12}=(12^4)^3$; а произведение чисел, оканчивающихся цифрой 6, также оканчивается цифрой 6. Число 13^{13} оканчивается цифрой 3, так как число 13^4 оканчивается цифрой 1 (проверить умножением), поэтому число $13^{12}=(13^4)^3$ также оканчивается цифрой 1, а число $13^{13}=13^{12}\cdot 13$ — циф-

рой 3. Данное число оканчивается нулем, так как $1+6+3=10$. **858.** Данное число оканчивается цифрой 4, так как $1982^{1982}=(1982^4)^{495}\cdot 1982^2$ и в этом произведении первое число оканчивается цифрой 6 (см. указание к задаче **857**), а второе — цифрой 4. **859.** Произведение двух натуральных чисел оканчивается нулем только в двух случаях: 1) когда хотя бы одно из этих чисел оканчивается нулем; 2) одно из этих чисел оканчивается цифрой 5, а другое — четное число. Выяснить, сколькими нулями оканчивается произведение чисел от 1 до 10, затем от 11 до 20 и т. д., обратив особое внимание на произведение от 41 до 50 и от 91 до 100. **860.** Известно, что при делении степени числа 10 с любым натуральным показателем на 9 остаток равен 1. Поэтому при делении числа $10^{25}+10^{17}$ на 9 остаток равен 2. **861.** При решении таких задач полезно использовать следующее свойство делимости чисел: если натуральные числа n и m делятся на натуральное число k, то числа $n+m$ и $n-m$ (при $n>m$) также делятся на число k. Произведение $(n-1)n(n+1)=n^3-n$, где натуральное число $n\geqslant 2$, трех последовательных натуральных чисел делится на 6, так как одно из них делится на 3 и хотя бы одно из них является четным. Вычтем из данного числа n^3+11 и число n^3-n (с целью уничтожения n^3) и прибавим это же число $n^3+11n-(n^3-n)+(n^3-n)=12n+(n^3-n)$. Так как $12n$ делится на 6 и n^3-n делится на 6, то их сумма, т. е. данное число, также делится на 6. **862.** См. указание к задаче **861**. **863.** Из разложения данного числа на множители $n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ следует, что это число делится на 6 (см. указание к задаче **861**). Если ни одно из чисел $n-1$, n, $n+1$ не делится на 5, то $n=5m+2$ или $n=5m+3$, где m — целое число. Показать, что в обоих этих случаях число n^2+1 делится на 5. **864.** Показать, что $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. **865.** Запишем искомое пятизначное число x в виде суммы разрядных слагаемых $x=10\,000a+1000b+100c+10d+t$, где a, b, c, t — цифры, причем $a\neq 0$. По условию задачи второе число $y=9x=10\,000t+1000d+100c+10b+a$. Заметим, что если $a>1$, то число $9x$ шестизначное. Следовательно, $a=1$, поэтому $t=9$ и равенство $y=9x$ таково: $90\,000+9000b+900c+90d+81=90\,000+1000d+100c+10b+1$, откуда $899b+80c+8=91d$. Из этого равенства следует, что $b=0$, так как при $b\geqslant 1$ левая часть равенства больше 899, а правая часть меньше или равна $91\cdot 9=819$. Из равенства $80c+8=91d$ следует, что $d\neq 0$ и d делится на 8, т. е. $d=8$, и поэтому $c=9$. **866.** Если первое трехзначное число $x=100a+10b+c$, где a, b, c — цифры и $a\neq 0$, то второе число $y=100c+10b+a$ и $c\neq 0$. Разность $x-y=99(a-c)$. Предположим, что $99(a-c)=n^2$, где n — натуральное число. Тогда n делится на 3, т. е. $n=3k$, и поэтому $11(a-c)=k^2$. Из этого равенства должно следовать, что k делится на 11, но тогда разность $a-c$ должна делиться на 11, а этого не может быть, так как a и c — цифры. **867.** Воспользоваться равенством $35x+65y=6(3x+8y)+17(x+y)$. **868.** Показать, что сумма квадратов двух нечетных чисел является четным числом, не делящимся на 4, и что такое число не может быть квадратом натурального числа. **869.** Сумму S квадратов пяти последовательных натуральных чисел можно записать так: $S=(n-2)^2+(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5(n^2+2)$, где натуральное число $n\geqslant 3$. Если предположить, что $5(n^2+2)=k^2$, где k — натуральное число, то число k должно делиться на 5 и поэтому число n^2+2 также должно делиться на 5. Однако покажем, что число n^2+2 не делится на 5 ни при каком натуральном n. При делении натурального числа n на число 5 остаток r может быть равен одному из чисел 0, 1, 2, 3, 4, т. е. $n=5k+r$, где k — неотрицательное целое число. Тогда $n^2+2=5(5k^2+2kr)+r^2+2$. Для того чтобы это число делилось на 5, нужно, чтобы число r^2+2 делилось на 5. Однако при r, равном 0, 1, 2, 3, 4, значения r^2+2 равны соответственно 2, 3, 6, 11, 18. **870.** Данное число $a=n^2+5n+16$ можно записать так: $a=(n-4)^2+13n$. Если это число делится на $169=13\cdot13$, то число $(n-4)^2$ и число $n-4$ делятся на 13, т. е. $n=4+13k$, где k — неотрицательное целое число. Но тогда $a=169k^2+13(4+13k)=169(k^2+k)+13\cdot4$, а это число не делится на 169. **871.** Нужно доказать, что если хотя бы одно из натуральных чисел n, m не делится на 3, то и число n^2+m^2 не делится на 3. Пусть число n не делится на 3, т. е. или $n=3k+1$, или $n=3k+2$, где k — неотрицательное целое число. Тогда или $n^2=3(3k^2+2k)+1$, или $n^2=3(3k^2+4k+1)+1$. В обоих случаях при делении числа n^2 на 3 остаток равен 1. Поэтому при делении числа n^2+m^2 на 3 остаток равен 1, если число m делится на 3, или остаток равен 2, если число m не делится на 3, т. е. число n^2+m^2 не делится на 3. **872.** Показать, что если $n=7m+r$, где m — неотрицательное целое число, а r — остаток от деления числа n на 7, то $n^3-3=7k+r^3-3$, где k — целое неотрицательное число. Осталось проверить, что при каждом значении r, равном 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, число r^3-3 не делится на 7. **873.** Так как p — простое число, то оно нечетное: $p=2k+1$, где k — натуральное число, $k\geqslant2$. Поэтому число $p^2-1=4k(k+1)$ делится на 8. Так как число p не делится на 3, то $p=3m+1$ или $p=3m+2$, где m — натуральное число. В первом случае число $p^2-1=3(3m^2+2m)$ делится на 3, во втором случае число $p^2-1=3(9m^2+4m+1)$ также делится на 3. **874.** При $n=3$ значение $n^2+8=17$ — простое число. Если $n>3$, n — простое число, то число n^2+8 не является простым, так как $n^2+8=(n^2-1)+9$ делится на 3 (см. указание к задаче **873**). **875.** Так же как и в задаче **873**, показать, что при делении p^2 на 4 и на 3 остаток равен 1. Пусть r — остаток от деления числа p^2 на 12, т. е. $p^2=12n+r$, где n — натуральное число, а r — целое число, $0\leqslant r\leqslant 11$. Так как 12 делится на 4 и на 3, то при делении числа $12n+r$ на 4 получается такой же остаток, какой и при делении числа r на 4. Аналогично при делении числа $12n+r$ на 3 получается такой же остаток, какой и при делении числа r на 3. Итак, при делении числа r на 4 и на 3 остаток равен 1. Проверкой показать, что среди чисел r, равных 0, 1, 2, ..., 11, только $r=1$ удовлетворяет этому условию. **876.** Воспользоваться равенством $n^4+4=(n^2+2)^2-4n^2=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n)$. **877.** Записать уравнение в виде $(x-1)(y-1)=1$. **878.** 1)—3) Избавиться от иррациональностей в знаменателях с помощью формул $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$, $\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}$, где $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. 4) Воспользоваться равенством $\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=$ $=\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+1}$. 5) Выражения левой и правой частей равенства представить в виде многочленов стандартного вида и сравнить их. **879.** Воспользоваться равенством задачи **878** (5). **881.** Преобразовать исходное равенство к виду $(a+b)(b+c)(c+a)=0$. **882.** Показать, что данное выражение равно $(a-b)(b-c)(c-a)$. **883.** Преобразовать исходное равенство к виду $ab(a-b)+c(a^2-b^2)=abc(a^2-b^2)+abc^2(a-b)$. Делением обеих частей этого равенства на $(a-b)$ получается равенство $ab+bc+ca=abc(a+b+c)$, откуда делением на abc получается равенство, которое нужно доказать.

884. Полезно ввести обозначение $S_n = x^n + y^n$, где n — натуральное число. По условию $S_1 = x + y = a$, $xy = b$. Поэтому $S_2 = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = a^2 - 2b$. Показать, что при $n \geq 3$ справедлива формула $S_n = aS_{n-1} - bS_{n-2}$. По этой формуле поочередно выразить S_3, S_4, S_5, S_6 через a и b. **885.** 1) Сначала сложить третью и четвертую дроби данного выражения, к результату прибавить вторую дробь и к последнему результату прибавить первую дробь. 2) Привести дроби к общему знаменателю и упростить числитель полученной дроби. 3) Показать, что при $1 \leq x \leq 2$ справедливы равенства $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1+\sqrt{x-1})^2} = 1+\sqrt{x-1}$, $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = \sqrt{(1-\sqrt{x-1})^2} = |1-\sqrt{x-1}| = 1-\sqrt{x-1}$. 4) Сначала показать, что при данных условиях подкоренные выражения данного выражения положительны и его знаменатель не равен нулю, затем исключить иррациональность в знаменателе умножением числителя и знаменателя на $(\sqrt{m+x} + \sqrt{m-x})$. При дальнейших преобразованиях воспользоваться равенством $\sqrt{(n^2-1)^2} = 1-n^2$ при $0 < n < 1$. **886.** 1)—4) Используя определение модуля числа, рассмотреть различные случаи значения модуля выражения, содержащего неизвестное. 5) Для краткости записи удобно ввести обозначение, например, $x^2 + 3x = t$. 6) Удобно ввести обозначение, например, $x^2 + 6x + 5 = t$. 7) Ввести обозначение $x + \dfrac{1}{x} = t$, тогда $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$. 8) Данное уравнение можно записать так: $x(x+1)(x-1)(x+2)+1=0$, или, перемножая x на $(x+1)$ и $(x-1)$ на $(x+2)$, так: $(x^2+x)(x^2+x-2)+1=0$, поэтому удобно ввести обозначение $x^2+x=t$. **887.** 1) Складывая уравнения системы, получаем $(x+y)^2 = 25$, откуда $x+y = \pm 5$; далее применить способ подстановки. 2) Вычитая из второго уравнения первое, получаем $x+y=7$; далее применить способ подстановки. 3) Складывая уравнения системы, получаем $(x+y)^2 + (x+y) - 30 = 0$, откуда $x+y=5$ или $x+y=-6$; далее применить способ подстановки. 4) Складывая уравнения системы, получаем $x^2 + x - 12 = 0$, откуда $x = 3$ или $x = -4$. Подставляя эти значения x в одно (любое) из уравнений системы, находим соответствующие значения y. 5) Вычитая из второго уравнения первое, возведенное в квадрат, получаем $xy = 2$; далее применить способ подстановки. 6) Обозначая $x+y=u$, $xy=v$ и используя равенство задачи **884** (2), получаем систему

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 2v^2 - 17u^2 = 0, \\ v = 2u, \end{cases}$$

которую можно решить способом подстановки. 7) Вычитая из первого уравнения второе, получаем $(y-2x)^2 = 1$, откуда $y = 2x+1$ или $y = 2x-1$. 8) Прибавляя к первому уравнению, умноженному на 5, второе, умноженное на 7, получаем уравнение $12y^2 - 19xy + 5x^2 = 0$, решая которое как квадратное относительно y, находим $y = \dfrac{5x}{4}$ или $y = \dfrac{x}{3}$. **888.** 1) Разделив второе уравнение на первое, получим уравнение $2y^2 - 5xy + 2x^2 = 0$, решая которое как квадратное относительно y, находим $y = 2x$ или $y = \dfrac{1}{2}x$. 2) Разделив второе уравнение на первое, получим $12y^2 - 25xy + 12x^2 = 0$, откуда $y = \dfrac{4}{3}x$ или $y = \dfrac{3}{4}x$.

3) Из второго уравнения получаем $y^2 = 5x^2 + 4$. Подставляя это значение y^2 в первое уравнение системы, получаем $x^3 - 5x^2y - 16x = 0$, откуда или $x = 0$, или $x^2 - 5xy = 16$. При $x = 0$ по формуле $y^2 = 5x^2 + 4$ находим $y = \pm 1$. Во втором случае получается система

$$\begin{cases} x^2 - 5xy = 16, \\ 5x^2 - y^2 = -4. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получаем $4y^2 + 5xy - 21x^2 = 0$, откуда $y = -3x$ или $y = \dfrac{7x}{4}$. 4) Обозначая $x + y = u$, $xy = v$ и используя равенство $x^2 + y^2 = u^2 - 2v$, получаем систему

$$\begin{cases} u(u^2 - 2v) = 5, \\ v^2(u^2 - 2v) = 20. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, находим $u = \dfrac{1}{4}v^2$. Подставляя это значение u в одно из уравнений системы, получаем уравнение $v^6 - 32v^3 - 320 = 0$, квадратное относительно v^3, откуда $v = -2$ и тогда $u = 1$, или $v = 2\sqrt[3]{5}$ и тогда $u = \sqrt[3]{25}$. Возвращаясь к неизвестным x и y, получаем две системы

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ xy = -2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = \sqrt[3]{25}, \\ xy = 2\sqrt[3]{5}. \end{cases}$$

Первая из них имеет два действительных решения $(2; -1)$ и $(-1; 2)$, а вторая не имеет действительных решений. 5) Обозначая $x + y = u$, $xy = v$ и используя равенство задачи **884** (1), получаем систему

$$\begin{cases} u = \dfrac{5}{2}v, \\ 8(u^3 - 3uv) = 65. \end{cases}$$

Подставляя значение u из первого уравнения во второе, получаем уравнение $125v^3 - 60v^2 - 65 = 0$, которое с помощью разложения его левой части на множители можно записать так: $(v - 1)(125v^2 + 65v + 65) = 0$, откуда $v = 1$, так как уравнение $125v^2 + 65v + 65 = 0$ не имеет действительных корней. 6) Сначала рассмотреть случаи $y = \pm x$. При $y \neq \pm x$, разделив первое уравнение на $x - y$, а второе — на $x + y$, получаем систему

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19, \\ x^2 - xy + y^2 = 7. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения этой системы второе уравнение, получаем $2xy = 12$, откуда $y = \dfrac{6}{x}$. 7) Разделив первое уравнение на второе, получаем $2y^2 - 5xy + 2x^2 = 0$, откуда $y = 2x$ или $y = \dfrac{1}{2}x$. 8) Перемножая уравнения, получаем $xy = 8$, откуда $y = \dfrac{8}{x}$. **889.** 1) С помощью формулы корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, показать, что это уравнение имеет равные корни (т. е. один корень) только тогда, когда $D = b^2 - 4ac = 0$. В данном случае $D = r^2 - 4(2r - 3)$. 2) Если корни квадратного уравнения действительные, то из теоремы Виета следует, что они являются противоположными числами только при $b = 0$, т. е. в данном случае $b = r = 0$. Осталось показать, что при $r = 0$ корни данного уравнения действительные. **890.** Показать, что при $r > 0$ корни данного квадратного уравнения действительные, поэтому $x_1 + x_2 = r$, $x_1 x_2 = -r$. Используя эти равенства и равенства задачи **884** (1), показать, что $x_1^3 + x_2^3 + (x_1 x_2)^3 = 3r^2$. **891.** Доказать, что в данном случае $D = ((a+b)^2 - c^2)((a-b)^2 - c^2)$. **892.** Доказать равенство $\left(r + \frac{1}{r}\right)^2 p^2 - 4q\left(r - \frac{1}{r^2}\right) = 4p^2 + \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 (p^2 - 4q)$. **893.** Пусть рациональное число $x = \frac{m}{n}$, где m — целое число, n — натуральное число, $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь, является корнем данного уравнения, т. е. $\frac{m^2}{n^2} + p\frac{m}{n} + q = 0$. Тогда $\frac{m^2}{n} = -pm - qn$ — целое число, поэтому $n = 1$. **894.** Данное биквадратное уравнение имеет четыре различных действительных корня только тогда, когда уравнение $t^2 - (a+b)t + ab = 0$ имеет два действительных различных положительных корня, т. е. когда, во-первых, $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$, откуда $a \neq b$, и, во-вторых, по теореме Виета $a + b > 0$ и $ab > 0$, откуда $a > 0$, $b > 0$. **895.** Корни данного уравнения действительные, так как $4(r-1)^2 - 4(2r+1) = 4r^2 - 16r > 0$ при $r < 0$. По теореме Виета оба корня отрицательны только тогда, когда $r - 1 < 0$ и $2r + 1 > 0$. **896.** Сначала рассмотреть случаи, когда первый коэффициент $r^2 - 1 = 0$, т. е. $r = \pm 1$. При $r \neq \pm 1$ данное неравенство является квадратным. Так как оно должно выполняться при всех действительных значениях x, то уравнение $(r^2 - 1)x^2 + 2(r-1)x + 1 = 0$ не должно иметь действительных корней, т. е. должно выполняться условие $4(r-1)^2 - 4(r^2 - 1) < 0$, откуда $r > 1$. Таким образом, если $r > 1$, то квадратичная функция $y(x) = (r^2 - 1)x^2 + 2(r-1)x + 1$ при всех действительных значениях x принимает значения одного знака: или только положительные, или только отрицательные. Осталось заметить, что $y(0) = 1 > 0$. **897.** Сначала показать, что $x^2 + x + 1 > 0$ при всех значениях x. Поэтому, умножая исходное двойное неравенство на $x^2 + x + 1$, получаем $\frac{1}{3}(x^2 + x + 1) \leqslant x^2 - x + 1 \leqslant 3(x^2 + x + 1)$. В этом двойном неравенстве первое неравенство преобразовать к виду $(x-1)^2 \geqslant 0$, а второе — к виду $(x+1)^2 \geqslant 0$. **898.** Пусть x — общий действительный корень данных уравнений, т. е. $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ — верные равенства. Вычитая из первого равенства второе, получаем $(a-1)(x-1) = 0$. Если $a = 1$, то исходные уравнения одинаковы и не имеют действительных корней. Следовательно, общим корнем может быть только $x = 1$. Подставляя $x = 1$ в первое уравнение, находим $a = -2$. Проверка показывает, что при $a = -2$ оба уравнения имеют общий корень $x = 1$. **899.** Пусть x_1 — общий корень данных уравнений, x_2 — второй корень первого уравнения, x_3 — второй корень второго уравнения. Вычитая из равенства $x_1^2 + ax_1 + bc = 0$ равенство $x_1^2 + bx_1 + ac = 0$, получаем $(a-b)(x_1 - c) = 0$. Так как $a \neq b$, то $x_1 = c$. Подставляя $x = c$ в первое уравнение, получаем $c(a + b + c) = 0$. Так как $c \neq 0$, то $a + b + c = 0$. По теореме Виета находим $x_2 = b$, $x_3 = a$. Осталось проверить, что если $a + b + c = 0$, то $x_1 = c$, $x_2 = b$ — корни первого уравнения, $x_1 = c$, $x_3 = a$ — корни второго уравнения, $x_2 = b$, $x_3 = a$ — корни третьего уравнения. **900.** Сначала рассмотреть случай $r = 4$. При $r \neq 4$ данное уравнение является квадратным.

Показать, что корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ положительны только тогда, когда $p^2 - 4q \geqslant 0$, $p < 0$, $q > 0$. Поэтому при $r \neq 4$ задача сводится к решению системы неравенств

$$\begin{cases} 9 - 2r \geqslant 0, \\ \dfrac{3-r}{r-4} < 0, \\ \dfrac{r}{r-4} > 0. \end{cases}$$

901. Воспользоваться формулой корней квадратного уравнения и теоремой Виета. **902.** Сначала рассмотреть случай $r = 0$. При $r \neq 0$ данное уравнение имеет действительные корни только при условии $(r+1)^2 - 8r \geqslant 0$, откуда $r \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$ или $r \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$. Пусть $r > 0$. Тогда графиком функции $y = y(x) = 2rx^2 - (r+1)x + 1$ является парабола, ветви которой направлены вверх. С помощью эскиза графика показать, что нули x_1, x_2 этой функции принадлежат интервалу $-1 < x < 1$ только тогда, когда абсцисса $x_0 = \dfrac{r+1}{4r}$ вершины параболы также принадлежит этому интервалу и $y(-1) > 0$, $y(1) > 0$. Получается система неравенств

$$\begin{cases} -1 < \dfrac{r+1}{4r} < 1, \\ 2r + (r+1) + 1 > 0, \\ 2r - (r+1) + 1 > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $r > \dfrac{1}{3}$. Далее показать, что $3 - 2\sqrt{2} < \dfrac{1}{3} < 3 + 2\sqrt{2}$. Следовательно, $r \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$. Аналогично рассмотреть случай $r < 0$. **903.** С помощью эскиза графика функции $y = x^2 + px + q$ показать, что $y(-1) < 0$, $y(1) < 0$. **904.** 1) Так как график функции $y = ax^2 + bx + c$ не имеет общих точек с осью абсцисс и $y(1) = a + b + c > 0$, то весь график расположен выше оси абсцисс, в частности $y(0) = c > 0$. 2) Аналогично, как и в предыдущем случае использовать условие $q - p + 1 = y(-1) < 0$. **905.** Сначала доказать равенство $S_m = (x_1 + x_2)S_{m-1} - x_1x_2S_{m-2}$. Поэтому $aS_m + bS_{m-1} + cS_{m-2} = (a(x_1 + x_2) + b)S_{m-1} + (-ax_1x_2 + c)S_{m-2} = 0$, так как по теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$. **906.** Пусть $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = t$. Тогда $\dfrac{a^2}{b^2} + \dfrac{b^2}{a^2} = t^2 - 2$ и данное выражение y таково: $y = 3t^2 - 8t + 4 = 3\left(t - \dfrac{2}{3}\right)(t-2)$. Если $ab < 0$, то $t < 0$ и $y = 3t^2 - 8t + 4 > 0$. Если $ab > 0$, то $t = \dfrac{a^2 + b^2}{ab} = \dfrac{(a-b)^2}{ab} + 2 \geqslant 2$ и $y = 3\left(t - \dfrac{2}{3}\right)(t-2) \geqslant 0$. **907.** Доказать равенство $x^2 + 5y^2 - 4xy + 2x - 6y + 3 = (x - 2y + 1)^2 + (y-1)^2 + 1$. **908.** Показать, что ордината вершины первой параболы равна $-a^2 - 2a$, а ордината вершины второй параболы равна $\dfrac{4a^2 - 1}{4a}$. Поэтому задача сводится к решению неравенства $\left(-a^2 - 2a - \dfrac{3}{4}\right) \times \left(\dfrac{4a^2 - 1}{4a} - \dfrac{3}{4}\right) < 0$, которое можно решить методом интервалов. **909.** Показать, что задача сводится (как и в задаче **908**) к решению неравенства $(-4a^2-a+5)\left(a-2-\frac{4}{a}+5\right)>0$. **910.** 1) $x^3-6x^2-x+30=x^3+2x^2-(8x^2-32)-x-2$. 2) $x^4-x^3-7x^2+x+6=x^4-x^3-(7x^2-7)+(x-1)=(x-1)(x^3-7x-7+1)=(x-1)(x^3+1-7(x+1))=(x-1)(x+1)(x^2-x+1-7)$. 3) Обозначая $x^2+x+1=t$, показать, что данное выражение равно $(t+4)\times(t-3)$. 4) Обозначая $x^2+4x+8=t$, показать, что данное выражение равно $(x+t)(2x+t)$. **911.** $x^5+x+1=x^5+x^4-x^4+x^3-x^3+x^2-x^2+x+1=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1-(x^4+x^3+x^2)=x^3(x^2+x+1)+(x^2+x+1)-x^2(x^2+x+1)$. **912.** 1) Числитель равен $(x^2+1)^2(x-1)(x+1)$, знаменатель равен $(x^2+1)\times(x+1)$. 2) Числитель равен $(x+1)(x+2)(x-2)$, знаменатель равен $(x+1)^2\times(x-2)$. 3) Числитель равен $x^3(x-2)+(x-2)=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)$, знаменатель равен $x^3-x^2+x-2x^2+2x-2=(x-2)(x^2-x+1)$. 4) Числитель равен $(x^4-2x^3+x^2)+(x^2-2x+1)=(x-1)^2(x^2+1)$, знаменатель равен $(x^3-2x^2+x)-2x^2+4x-2=x(x^2-2x+1)-2(x^2-2x+1)=(x-1)^2(x-2)$. **914.** 1)—4) Воспользоваться методом интервалов. 5) Показать, что $|x^2-5x|=x^2-5x$ при $x\leqslant 0$ и при $x\geqslant 5$, $|x^2-5x|=-(x^2-5x)$ при $0<x<5$. 6) Рассмотреть случаи $x<-\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}\leqslant x<\frac{3}{4}$, $x\geqslant\frac{3}{4}$. 7) Показать, что данное неравенство таково: $|x+1|\,|x+3|>|x+3|$. Поэтому нужно решить неравенство $|x+1|>1$ при условии $x\neq-3$. 8) Показать, что $x^2-x+1>0$ и $x^2-3x+4>0$ при всех значениях x. Поэтому данное равенство таково: $x^2-x+1\leqslant x^2-3x+4$. **915.** Преобразовать в неравенство: 1) $(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$; 2) $(a-b)^2+a^2+4b^2\geqslant 0$; 3) $(a-b)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\geqslant 0$; 4) $\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqslant 0$; 5) $(a-b)^2\left(\left(a+\frac{1}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right)\geqslant 0$; 6) $a^2b^2(a-b)^2\geqslant 0$. **916.** Преобразовать в неравенство: 1) $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2\geqslant 0$; 2) $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{a}}-1\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{b}}-1\right)^2\geqslant 0$; 3) $(a+b)(a-b)^2\geqslant 0$; 4) $a+b+2>0$.

Предметный указатель

Абсолютная погрешность 52
Арифметический квадратный корень 85

Биквадратное уравнение 127

График квадратичной функции 166

Двойное неравенство 33
Действительное число 90

Иррациональное число 90

Квадратный корень 85
Квадратное неравенство 173
Квадратный трехчлен 124
Квадратное уравнение 109
Квадратичная функция 151
Комплексное число 139

Метод выделения полного квадрата 114
— интервалов 181
Микрокалькулятор 68
Модуль числа 42

Неполное квадратное уравнение 112
Неравенство с одним неизвестным 23
Нестрогое неравенство 21

Округление чисел 57
Основные свойства неравенств 26
Относительная погрешность 60
Отрицательное рациональное число 3

Парабола 154
Периодическая дробь 89
Положительное рациональное число 3
Посторонний корень 129
Приближенное значение величины 51
Приведенное квадратное уравнение 121

Растяжение графика функции 157
Рациональные числа 88
Решение квадратных уравнений 116
— неравенства 24
— системы неравенств 37
— —, содержащей уравнение второй степени 135

Свойства числовых неравенств 13
Сдвиг графика функции 162
Сжатие графика функции 158
Система неравенств с одним неизвестным 32
Сложение неравенств 17
Стандартный вид числа 73
Строгое неравенство 20

Теорема Виета 122
—, обратная теореме Виета 123
— о квадратном корне из дроби 101
— о квадратном корне из произведения 97
— о квадратном корне из степени 94
— о разложении квадратного трехчлена на множители 124
Тождество 94
Точность измерения 55

Умножение неравенств 17

Фокус параболы 155
Формула корней квадратного уравнения 117

Числовое неравенство 10
Числовой промежуток 33

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Неравенства

§ 1. Положительные и отрицательные числа 3
§ 2. Числовые неравенства 10
§ 3. Основные свойства числовых неравенств 13
§ 4. Сложение и умножение неравенств 17
§ 5. Строгие и нестрогие неравенства 20
§ 6. Неравенства с одним неизвестным 23
§ 7. Решение неравенств 25
§ 8. Системы неравенств с одним неизвестным. Числовые промежутки 32
§ 9. Решение систем неравенств 37
§ 10. Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль 42
Упражнения к главе I 47

Глава II. Приближенные вычисления

§ 11. Приближенные значения величин. Погрешность приближения 51
§ 12. Оценка погрешности 54
§ 13. Округление чисел 57
§ 14. Относительная погрешность 60
§ 15. Практические приемы приближенных вычислений 62
§ 16. Простейшие вычисления на микрокалькуляторе 68
§ 17. Действия над числами, записанными в стандартном виде . . . 73
§ 18. Вычисления на микрокалькуляторе степени и числа, обратного данному 77
§ 19. Последовательное выполнение операций на микрокалькуляторе 80
Упражнения к главе II 82

Глава III. Квадратные корни

§ 20. Арифметический квадратный корень 85
§ 21. Действительные числа 88
§ 22. Квадратный корень из степени 94
§ 23. Квадратный корень из произведения 97
§ 24. Квадратный корень из дроби 101
Упражнения к главе III 105

Глава IV. Квадратные уравнения

§ 25. Квадратное уравнение и его корни 108
§ 26. Неполные квадратные уравнения 112
§ 27. Метод выделения полного квадрата 114
§ 28. Решение квадратных уравнений 116
§ 29. Приведенное квадратное уравнение. Теорема Виета 121
§ 30. Уравнения, сводящиеся к квадратным 127
§ 31. Решение задач с помощью квадратных уравнений 130
§ 32. Решение простейших систем, содержащих уравнение второй степени 135
§ 33*. Комплексные числа 139
§ 34*. Квадратное уравнение с комплексным неизвестным 142
Упражнения к главе IV 145

Глава V. Квадратичная функция

§ 35. Определение квадратичной функции 151
§ 36. Функция $y = x^2$ 154
§ 37. Функция $y = ax^2$ 157
§ 38. Функция $y = ax^2 + bx + c$ 161
§ 39. Построение графика квадратичной функции 165
Упражнения к главе V 171

Глава VI. Квадратные неравенства

§ 40. Квадратное неравенство и его решение 173
§ 41. Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции 177
§ 42. Метод интервалов 181
§ 43*. Исследование квадратичной функции 185
Упражнения к главе VI 190

Упражнения для повторения курса алгебры VIII класса . . . 193

Задачи для внеклассной работы 210

Краткое содержание курса алгебры VII класса 217

Краткое содержание курса алгебры VIII класса 225

Ответы 234

Предметный указатель 253

Учебное издание

Алимов Шавкат Арифджанович
Колягин Юрий Михайлович
Сидоров Юрий Викторович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Шабунин Михаил Иванович

АЛГЕБРА

8 класс

Учебник для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Л. Н. Белоновская, Н. Н. Сорокина*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художники *В. А. Андрианов, И. В. Гущин, В. В. Костин*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Технический редактор *Л. М. Абрамова*
Корректоры *О. Н. Леонова, А. В. Рудакова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 02.04.12. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 13,51 + 0,42 форз. Тираж 15 000 экз. Заказ № 32832.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

Квадратные корни

$$\text{если } a \geqslant 0, \text{ то } \sqrt{a} \geqslant 0, \ (\sqrt{a})^2 = a$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\text{если } a \geqslant 0, \ b \geqslant 0, \text{ то } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\text{если } a \geqslant 0, \ b > 0, \text{ то } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Формулы Виета

$$x^2 + px + q = 0$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 x_2 = q$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

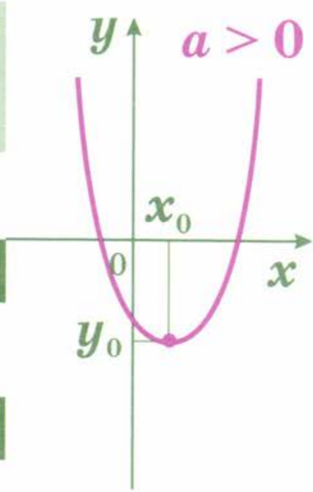
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

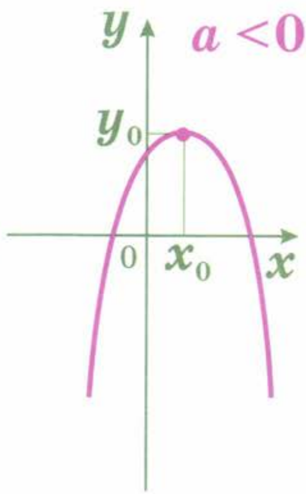
Квадратичная функция

$$y = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0$$

$$y = ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2 + y_0$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \; y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$$





Наименьшее значение равно

$y_0 = y(x_0)$

Наибольшее значение равно

$y_0 = y(x_0)$